9. cvičení

Rozhodněte o (lokálně) stejnoměrné konvergenci řady:

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+x^2)},\ x \in \langle 0, \infty)$

2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{2x-n},\ x \in \mathbb{R}$

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{3n}+1},\ x \in \langle 1, \infty)$

4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3x+x} - \sqrt{n^3x}\right),\ x \in \langle 0, \infty)$

5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3x+1} - \sqrt{n^3x}\right),\ x \in \langle 0, \infty)$

6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{x}{3^n}\right),\ x \in \mathbb{R}$

8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x^n}{3^n}\right),\ x \in \langle -1, 1\rangle$

9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x^n}{5^n}\right),\ x \in \langle -2, 2\rangle$

10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right),\ x \in \mathbb{R}$

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right),\ x \in \langle 0, 1\rangle$

12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{3^n},\ x \in \mathbb{R}$

13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^3 \cdot e^{-nx},\ x \in \langle 0, \infty)$

14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^6x^2},\ x \in \mathbb{R}$

15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{3n}),\ x \in \langle 0, 1\rangle$

16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{3n}),\ x \in \langle 1, \infty)$

Mezivýsledky — majoranta g_n, případná posloupnost x_n: $\boxed{\mathbf{1}}$ $g_n = \frac{1}{n^2}$ na $\langle 0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $g_n = \frac{e^{2\alpha}}{e^n}$ na $(-\infty,\alpha\rangle$, $x_n = n \to \infty$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $g_n = \frac{1}{\alpha^{2n}}$ na $\langle\alpha,\infty) \subset (1,\infty)$, pro $x = 1$ řada diverguje; $\boxed{\mathbf{4}}$ $g_n = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{n^3}}$ na $\langle 0,\alpha\rangle$, $x_n = n \to \infty$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $g_n = \frac{1}{2\sqrt{n^3\alpha}}$ na $\langle\alpha,\infty) \subset (0,\infty)$, pro $x = 0$ řada diverguje; $\boxed{\mathbf{6}}$ $g_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ na $\langle-\alpha,\alpha\rangle$, $x_n = n! \to \infty$ a $x_n = -n! \to -\infty$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $g_n = \alpha\cdot(\frac{2}{3})^n$ na $\langle-\alpha,\alpha\rangle$, $x_n = 3^n \to \infty$ a $x_n = -3^n \to -\infty$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $g_n = (\frac{2}{3})^n$ na $\langle-1,1\rangle$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $g_n = (\frac{4}{5})^n$ na $\langle-2,2\rangle$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $g_n = \frac{\alpha}{n^2}$ na $\langle-\alpha,\alpha\rangle$, $x_n = n \to \infty$ a $x_n = -n \to -\infty$; $\boxed{\mathbf{11}}$ konverguje bodově pouze pro $x = 0$, tedy o stejnoměrné konvergenci nemá smysl uvažovat; $\boxed{\mathbf{12}}$ $g_n = \frac{\alpha^n}{3^n}$ na $\langle-\alpha,\alpha\rangle \subset (-3,3)$, mimo interval $(-3,3)$ řada diverguje; $\boxed{\mathbf{13}}$ $g_n = f_n(\frac{3}{n}) = \frac{27}{n^3e^3}$ na $\langle 0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{14}}$ $g_n = f_n(\frac{1}{n^3}) = \frac{1}{2n^2}$ na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{15}}$ $f_n(\sqrt[2n]{\frac{1}{3}}) = \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{(\frac{1}{3})^3} \neq 0$, tedy $x_n = \sqrt[2n]{\frac{1}{3}} \to 1$, $g_n = \alpha^n$ na $\langle 0,\alpha\rangle \subset \langle 0,1)$; $\boxed{\mathbf{16}}$ konverguje bodově pouze pro $x = 1$, tedy o stejnoměrné konvergenci nemá smysl uvažovat.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ stejnoměrně na $\langle 0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{2}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ lokálně stejnoměrně na $(1,\infty)$; $\boxed{\mathbf{4}}$ lokálně stejnoměrně na $\langle 0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{5}}$ lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{6}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{7}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{8}}$ stejnoměrně na $\langle-1,1\rangle$; $\boxed{\mathbf{9}}$ stejnoměrně na $\langle-2,2\rangle$; $\boxed{\mathbf{10}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ konverguje bodově pouze pro $x = 0$, tedy o stejnoměrné konvergenci nemá smysl uvažovat;
$\boxed{\mathbf{12}}$ lokálně stejnoměrně na $(-3,3)$; $\boxed{\mathbf{13}}$ stejnoměrně na $\langle 0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{14}}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{15}}$ lokálně stejnoměrně na $\langle 0,1)$; $\boxed{\mathbf{16}}$ konverguje bodově pouze pro $x = 1$, tedy o stejnoměrné konvergenci nemá smysl uvažovat.