2. cvičení

S využitím odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci řady:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\cdot\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\cdot\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\cdot\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}$ $\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\cdot\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n^2}$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$ $\boxed{6}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccotg}^n\Big(\frac{1}{n}\Big)$ $\boxed{8}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccotg}^n\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big)$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{arccotg} n}{2}\Big)^n$ $\boxed{10}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

$\boxed{11}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\sin(n\pi)}{3}\Big)^n$ $\boxed{12}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3+(-1)^n)^n}$

$\boxed{13}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(7+(-1)^n)^n}$ $\boxed{14}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n^n}$

$\boxed{15}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\sin^2(3n)}{3}\Big)^n$ $\boxed{16}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\cos^2(5n)}{4}\Big)^n$

Mezivýsledky — hodnota $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$: $\boxed{1}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{2}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{3}$ $\frac{1}{2e}$; $\boxed{4}$ $\frac{e}{2}$; $\boxed{5}$ 0; $\boxed{6}$ $\frac{\pi}{4}$; $\boxed{7}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{8}$ $\frac{\pi}{4}$; $\boxed{9}$ 0; $\boxed{10}$ 0; $\boxed{11}$ 0 (dokonce $a_n = 0$ pro všechna n); $\boxed{12}$ sudé $\frac{3}{4}$, liché $\frac{3}{2}$; $\boxed{13}$ sudé $\frac{1}{2}$, liché $\frac{2}{3}$; $\boxed{14}$ ∞; $\boxed{15}$ limita neexistuje, ale všechny $\sqrt[n]{a_n}$ jsou menší než $\frac{1}{3}$; $\boxed{16}$ limita neexistuje, ale všechny $\sqrt[n]{a_n}$ jsou menší než $\frac{1}{4}$.

Výsledky: (K = konverguje, D = diverguje) $\boxed{1}$ K; $\boxed{2}$ K; $\boxed{3}$ K; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$ K; $\boxed{6}$ K; $\boxed{7}$ D; $\boxed{8}$ K; $\boxed{9}$ K; $\boxed{10}$ K; $\boxed{11}$ K; $\boxed{12}$ D; $\boxed{13}$ K; $\boxed{14}$ D; $\boxed{15}$ K; $\boxed{16}$ K.

Ze seznamu vyberte ty řady, které nesplňují nutnou podmínku konvergence (a tudíž divergují):

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-n}{n^3+1}$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n+4}$ $\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2(n)$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{3-\ln n}$ $\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n-n}$ $\boxed{6}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n-n}$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n-n}$ $\boxed{8}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2-n^2}{3-n^2}$ $\boxed{9}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2}{3-n^2}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ $\boxed{\mathbf{11}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ $\boxed{\mathbf{12}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)\cdot n!}$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(1+\frac{1}{n})^n}$ $\boxed{\mathbf{14}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(1+\frac{1}{n})^n}$ $\boxed{\mathbf{15}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0,001}}$

$\boxed{\mathbf{16}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n^2$ $\boxed{\mathbf{17}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ $\boxed{\mathbf{18}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{n}$

Mezivýsledky — hodnota $\lim_{n\to\infty} a_n$: $\boxed{\mathbf{1}}$ 0; $\boxed{\mathbf{2}}$ 3; $\boxed{\mathbf{3}}$ neexistuje; $\boxed{\mathbf{4}}$ -1; $\boxed{\mathbf{5}}$ ∞; $\boxed{\mathbf{6}}$ 0; $\boxed{\mathbf{7}}$ 0; $\boxed{\mathbf{8}}$ neexistuje; $\boxed{\mathbf{9}}$ 0; $\boxed{\mathbf{10}}$ neexistuje; $\boxed{\mathbf{11}}$ 0; $\boxed{\mathbf{12}}$ 1; $\boxed{\mathbf{13}}$ ∞; $\boxed{\mathbf{14}}$ 0; $\boxed{\mathbf{15}}$ 1; $\boxed{\mathbf{16}}$ neexistuje; $\boxed{\mathbf{17}}$ 0; $\boxed{\mathbf{18}}$ $-\infty$.

Výsledky: Nesplňuje $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$, $\boxed{\mathbf{8}}$, $\boxed{\mathbf{10}}$, $\boxed{\mathbf{12}}$, $\boxed{\mathbf{13}}$, $\boxed{\mathbf{15}}$, $\boxed{\mathbf{16}}$, $\boxed{\mathbf{18}}$.

Ze seznamu vyberte řady alternující (a tudíž konvergentní):

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot 3^n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^3}{5+n^3}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n}{5+n^3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{3+(-1)^n}{n}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$ $\boxed{\mathbf{6}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n+\ln n}$ $\boxed{\mathbf{8}}$ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \cos\frac{\pi}{n}$ $\boxed{\mathbf{10}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi n+1}{2n}\right)$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$ $\boxed{\mathbf{12}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Mezivýsledky — střídání znaménka splňují : všechny kromě $\boxed{\mathbf{5}}$, postupují do dalšího kola.

Mezivýsledky druhé kolo — podmínku $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ splňují : $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$, $\boxed{\mathbf{7}}$, $\boxed{\mathbf{8}}$, $\boxed{\mathbf{10}}$, $\boxed{\mathbf{11}}$, $\boxed{\mathbf{12}}$, postupují do dalšího kola. Rada: limitu u $\boxed{\mathbf{12}}$ odvoďte pomocí podílového kritéria.

Mezivýsledky třetí kolo — podmínku monotonie splňují : $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{7}}$, $\boxed{\mathbf{8}}$, $\boxed{\mathbf{10}}$, $\boxed{\mathbf{11}}$, $\boxed{\mathbf{12}}$. Tyto řady jsou alternující.