8. cvičení

S využitím derivace $f'_n(x)$ rozhodněte o (lokálně) stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, je-li:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f_n(x) = \dfrac{x}{x^3 + 2n^4}$, $x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (bez derivace) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1 + nx}$, $x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$

Mezivýsledky — $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, majoranta g_n, případná posloupnost x_n: $\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \infty)$, $g_n = f_n(\sqrt[3]{n^4}) = \frac{1}{3n^2\sqrt[3]{n^2}}$ na $\langle 0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle 0, \infty)$, $x_n = n \to \infty$, $g_n = \frac{\alpha}{n}$ na $\langle 0, \alpha\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$, z derivace: $f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4} \neq 0$, tedy $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$, $g_n = \alpha^n$ na $\langle 0, \alpha\rangle \subset \langle 0, 1)$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ stejnoměrně na $\langle 0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{2}}$ lokálně stejnoměrně na $\langle 0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{3}}$ lokálně stejnoměrně na $\langle 0, 1)$.

Rozhodněte o (lokálně) stejnoměrné konvergenci řady:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{e^n}$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^3}{5^n}$, $\langle -1, 1\rangle$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^3} \cdot x^n$, $x \in \langle -1, 1\rangle$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+nx}$, $x \in (0, \infty)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3x^3}$, $x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x+n)}{1+n^2x^2}$, $x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3x^3}$, $x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x^n)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{x^2+n^3}$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \ln n}{n}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+nx}$, $x \in \langle 0, \infty)$

Mezivýsledky — majoranta g_n, případná posloupnost x_n: $\boxed{\mathbf{1}}$ $g_n = \frac{1}{e^n}$ na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $g_n = \frac{8}{5^n}$ na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $g_n = \frac{n}{1+n^3}$ na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ řada diverguje pro všechna $x > 0$, majoranta neexistuje; $\boxed{\mathbf{5}}$ $g_n = \frac{1}{1+n^3\alpha^3}$ na $\langle \alpha, \infty) \subset (0, \infty)$, pro $x = 0$ řada diverguje;

$\boxed{\mathbf{6}}$ $g_n = \frac{\pi}{2(1+n^2\alpha^2)}$ na $\langle\alpha,\infty)$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $g_n = \frac{1}{1+n^2}$ na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $g_n = \frac{1}{n^2\alpha^2}$ na $\langle\alpha,\infty)$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $g_n = \alpha^n$ na $\langle-\alpha,\alpha\rangle \subset (-1,1)$, pro $x = \pm 1$ řada diverguje; $\boxed{\mathbf{10}}$ $g_n = \frac{\alpha^4}{n^3}$ na $\langle-\alpha,\alpha\rangle$, $x_n = n \to \infty$ a $x_n = -n \to -\infty$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $g_n = \alpha^n \cdot \frac{\ln n}{n} \leqq \alpha^n$ na $\langle 0,\alpha\rangle \subset \langle 0,1)$, pro $x = 1$ řada diverguje; $\boxed{\mathbf{12}}$ diverguje pro $x \neq 0$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ stejnoměrně na $\langle-1,1\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ stejnoměrně na $\langle-1,1\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ stejnoměrně nikde; $\boxed{\mathbf{5}}$ lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{6}}$ lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{7}}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{8}}$ lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$; $\boxed{\mathbf{9}}$ lokálně stejnoměrně na $(-1,1)$; $\boxed{\mathbf{10}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ lokálně stejnoměrně na $\langle 0,1)$; $\boxed{\mathbf{12}}$ nemá smysl uvažovat.