7. cvičení

Rozhodněte o (lokálně) stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, je-li:

$\boxed{1}$ $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{e^n},\ x \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $f_n(x) = \dfrac{(x+1)^3}{5^n},\ \langle -1, 1\rangle$

$\boxed{3}$ $f_n(x) = \dfrac{x^n \cdot \ln n}{n},\ x \in \langle -1, 1\rangle$

$\boxed{4}$ $f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2} \cdot x^n,\ x \in \langle -1, 1\rangle$

$\boxed{5}$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{6}$ $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^3x^3},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{7}$ $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx},\ x \in \langle 1, \infty)$

$\boxed{8}$ $f_n(x) = \dfrac{x+n}{1+x+n},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{9}$ $f_n(x) = (\ln x)^n,\ x \in \langle 1, e\rangle$

$\boxed{10}$ $f_n(x) = n^{-x},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{11}$ $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x+n)}{1+nx},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{12}$ $f_n(x) = \cos^n(x),\ x \in \langle 0, \pi\rangle$

$\boxed{13}$ $f_n(x) = \sqrt[n]{x},\ x \in \langle 0, 1\rangle$

$\boxed{14}$ $f_n(x) = \sqrt[n]{x},\ x \in \langle 0, 2\rangle$

$\boxed{15}$ $f_n(x) = \dfrac{x^4}{x^2+n^3},\ x \in \mathbb{R}$

$\boxed{16}$ $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n+x},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{17}$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^3},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{18}$ $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{1+n^3x^3},\ x \in \langle 0, \infty)$

$\boxed{19}$ $f_n(x) = n \cdot \sin\left(\dfrac{x}{n^2}\right),\ x \in \mathbb{R}$

$\boxed{20}$ $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3^n}\right),\ x \in \mathbb{R}$

Mezivýsledky — $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$: $\boxed{1}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{2}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$; $\boxed{3}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$; $\boxed{4}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$; $\boxed{5}$ $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ pro $x \in (0, \infty)$; $\boxed{6}$ $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \in (0, \infty)$; $\boxed{7}$ $f(x) = x$ pro $x \in \langle 0, \infty)$; $\boxed{8}$ $f(x) = 1$ pro $x \in \langle 0, \infty)$; $\boxed{9}$ $f(e) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \in \langle 1, e)$; $\boxed{10}$ $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \in (0, \infty)$; $\boxed{11}$ $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0$ pro $x \in (0, \infty)$; $\boxed{12}$ $f(0) = 1$, $f(\pi)$ neexistuje, $f(x) = 0$ pro $x \in (0, \pi)$; $\boxed{13}$ $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ pro $x \in (0, 1\rangle$; $\boxed{14}$ $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ pro $x \in (0, 2\rangle$; $\boxed{15}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{16}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \infty)$; $\boxed{17}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \infty)$; $\boxed{18}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \infty)$; $\boxed{19}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{20}$ $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Mezivýsledky — majoranta g_n, případná posloupnost x_n: $\boxed{1}$ $g_n = \frac{1}{e^n}$ na $\mathbb{R}$; $\boxed{2}$ $g_n = \frac{8}{5^n}$ na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{3}$ $g_n = \frac{\ln n}{n}$ na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{4}$ $g_n = \frac{n}{1+n^2}$ na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{5}$ $g_n = \frac{1}{1+n\alpha}$ na $\langle \alpha, \infty)$; $\boxed{6}$ $g_n = \frac{1}{1+n^3\alpha^3}$ na $\langle \alpha, \infty)$; $\boxed{7}$ $g_n = \frac{1}{n}$ na $\langle 0, \infty)$; $\boxed{8}$ $g_n = \frac{1}{1+n}$ na $\langle 0, \infty)$; $\boxed{9}$ $g_n = (\ln \alpha)^n$ na $\langle 1, \alpha\rangle \subset \langle 1, e)$; $\boxed{10}$ $e^{-\alpha \ln(n)}$ na $\langle \alpha, \infty)$; $\boxed{11}$ $g_n = \frac{\pi}{2(1+\alpha n)}$ na $\langle \alpha, \infty)$; $\boxed{12}$ $g_n = \cos^n(\alpha)$ na $\langle \alpha, \pi - \alpha\rangle$; $\boxed{13}$ $g_n = 1 - \sqrt[n]{\alpha}$ na $\langle \alpha, 1\rangle \subset (0, 1\rangle$; $\boxed{14}$ $g_n = (1 - \sqrt[n]{\alpha}) + (\sqrt[n]{2} - 1) = \sqrt[n]{2} - \sqrt[n]{\alpha}$ na $\langle \alpha, 2\rangle \subset (0, 2\rangle$; $\boxed{15}$ $g_n = \frac{\alpha^4}{n^3}$ na $\langle -\alpha, \alpha\rangle$, $x_n = n \to \infty$ a $x_n = -n \to -\infty$; $\boxed{16}$ $g_n = \frac{\alpha}{n}$ na $\langle 0, \alpha\rangle$, $x_n = n \to \infty$; $\boxed{17}$ $g_n = \frac{1}{n^2\alpha^2}$ na $\langle \alpha, \infty)$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$; $\boxed{18}$ $g_n = \frac{1}{n\alpha^2}$ na $\langle \alpha, \infty)$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$; $\boxed{19}$ $g_n = \frac{\alpha}{n}$ na $\langle -\alpha, \alpha\rangle$, $x_n = n^2 \to \infty$ a $x_n = -n^2 \to -\infty$; $\boxed{20}$ $g_n = \frac{\alpha}{3^n}$ na $\langle -\alpha, \alpha\rangle$, $x_n = 3^n \to \infty$ a $x_n = -3^n \to -\infty$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ stejnoměrně na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ stejnoměrně na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ stejnoměrně na $\langle -1, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{6}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{7}}$ stejnoměrně na $\langle 0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{8}}$ stejnoměrně na $\langle 0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{9}}$ lokálně stejnoměrně na $\langle 1, e)$; $\boxed{\mathbf{10}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{11}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{12}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \pi)$; $\boxed{\mathbf{13}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{14}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, 2\rangle$; $\boxed{\mathbf{15}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{16}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{17}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{18}}$ lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{19}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{20}}$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.