8. cvičení

Pro funkci F určete uvedené parciální derivace druhého řádu:

$$\boxed{\mathbf{1}}\quad F(x,y,z) = xy + yz + zx,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\mathbf{2}}\quad F(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\mathbf{3}}\quad F(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\mathbf{4}}\quad F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Výsledky (parciální derivace jsou uvedeny ve stejném pořadí jako v zadání):
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1, 0; $\boxed{\mathbf{2}}$ $-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{8xyz}{(x^2+y^2)^3}$, 0; $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\frac{4xz}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{8xyz^2}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{2}{x^2+y^2}$, $\frac{2z^2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$;
$\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{3xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$, $\frac{2z^2-x^2-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$.

Metodou Jacobiánu určete extrémy funkce F na dané množině.

$$\boxed{\mathbf{1}}\quad F(x,y,z) = x - 2y + 2z,\ x^2+y^2 = 17,\ y+z = 0$$

$$\boxed{\mathbf{2}}\quad F(x,y,z) = x - 2y + 2z,\ x^2+y^2 = 5,\ z^2 = 4$$

$$\boxed{\mathbf{3}}\quad F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2,\ x+y-3z = -7,\ x-y+z = 3$$

A dva příklady pro ty, kteří rádi upravují algebraické výrazy:

$$\boxed{\mathbf{4}}\quad F(x,y,z) = xy + yz,\ x^2+y^2 = 2,\ y+z = 2$$

$$\boxed{\mathbf{5}}\quad F(x,y,z) = xyz,\ x^2+y^2+z^2 = 6,\ x+y+z = 0$$

Nápověda pro $\boxed{\mathbf{4}}$: determinant se dá pravit na tvar $4(y-1)(y+1+x)$.
Nápověda pro $\boxed{\mathbf{5}}$: determinant se dá upravit na tvar $6(y-z)(x^2-1)$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ min $= F(-1,4,-4) = -17$, max $= F(1,-4,4) = 17$;
$\boxed{\mathbf{2}}$ min $= F(-1,2,-2) = -9$, max $= F(1,-2,2) = 9$;
$\boxed{\mathbf{3}}$ min $= F(0,-1,2) = 5$, sup $= \infty$; $\boxed{\mathbf{4}}$ min $= F(-1,1,1) = 0$, max $= F(1,1,1) = 2$;
$\boxed{\mathbf{5}}$ min $= F(-2,1,1) = F(1,1,-2) = F(1,-2,1) = -2$, max $= F(-1,-1,2) =$
$= F(2,-1,-1) = F(-1,2,-1) = 2$.

Určete lokální extrémy funkce:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $F(x,y) = 10 - x^2 - y^2$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $F(x,y) = (x+2)^2 - (y+1)^2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $F(x,y) = 10 - x^2 - y^3$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $F(x,y) = x^2 - 2xy + y$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $F(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 17$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $F(x,y) = 2x + 3y - \ln(xy)$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $F(x,y) = \ln(xy) + x + \frac{y}{2}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $F(x,y) = \ln(xy) + x - y$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $F(x,y) = x^2 + y^3 - 2x - 3y$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - y$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $F(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ $F(x,y) = \frac{2}{x} - x^2y + \frac{1}{y}$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $F(x,y) = \frac{2}{x} + x^2y + \frac{1}{y}$

$\boxed{\mathbf{14}}$ $F(x,y) = x^2e^{x-y} + 2ye^{x-y}$

$\boxed{\mathbf{15}}$ $F(x,y) = \frac{x}{y^3}$

$\boxed{\mathbf{16}}$ $F(x,y) = \frac{x^2}{y^3} + y^2 - 2y$

$\boxed{\mathbf{17}}$ $F(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - y^2 - 2y$

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ maximum v bodě $[0,0]$; $\boxed{\mathbf{2}}$ sedlo v bodě $[-2,-1]$; $\boxed{\mathbf{3}}$ v bodě $[0,0]$ nelze rozhodnout; $\boxed{\mathbf{4}}$ sedlo v bodě $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; $\boxed{\mathbf{5}}$ minimum v bodě $[0,0]$; $\boxed{\mathbf{6}}$ minimum v bodě $[\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$; $\boxed{\mathbf{7}}$ maximum v bodě $[-1,-2]$; $\boxed{\mathbf{8}}$ žádný lokální extrém; $\boxed{\mathbf{9}}$ sedlo v bodě $[1,-1]$, minimum v bodě $[1,1]$; $\boxed{\mathbf{10}}$ sedlo v bodě $[-1,-1]$, minimum v bodě $[1,1]$; ; $\boxed{\mathbf{11}}$ lokální minimum v bodě $[1,1]$; $\boxed{\mathbf{12}}$ žádný lokální extrém; $\boxed{\mathbf{13}}$ minimum v bodě $[1,1]$, maximum v bodě $[-1,-1]$; $\boxed{\mathbf{14}}$ sedlo v bodě $[-1,\frac{1}{2}]$; $\boxed{\mathbf{15}}$ žádný lokální extrém; $\boxed{\mathbf{16}}$ minimum v bodě $[0,1]$; $\boxed{\mathbf{17}}$ maximum v bodě $[0,-1]$.

Lokální extrémy v $\mathbb{R}^3$

Sylvestrovo pravidlo a lokální extrémy v $\mathbb{R}^3$. Nechť $[x,y,z]$ je bod podezřelý z extrému, tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z), \qquad D_2 = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y,z) \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Je-li

$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0,$ potom je v bodě $[x,y,z]$ lokální minimum

$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,$ potom je v bodě $[x,y,z]$ lokální maximum

$D_1 \in \mathbb{R},\ D_2 < 0,\ D_3 \in \mathbb{R},$ potom je v bodě $[x,y,z]$ sedlo

$D_1 > 0,\ D_2 \in \mathbb{R},\ D_3 < 0,$ potom je v bodě $[x,y,z]$ sedlo

$D_1 < 0,\ D_2 \in \mathbb{R},\ D_3 > 0,$ potom je v bodě $[x,y,z]$ sedlo

Pokud nastane některá z možností výše neuvedených, je matice, ze které se počítá determinant D_3, buď indefinitní nebo semidefinitní. Rozhodnout je možné metodami lineární algebry. V indefinitním případě je v bodě $[x,y,z]$ sedlo, v semidefinitním případě se nedá o extrému rozhodnout touto metodou, musí se zvolit jiný postup.

Určete lokální extrémy funkce F:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz + 4x - 8y - 2z$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xz - 8x - 4y + z$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $F(x,y,z) = 8x - 4y + z - x^2 - 2y^2 - z^2 - xz$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $F(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$ na množině $(0,\infty)^3$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $F(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ na množině $(0,\pi)^3$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $F(x, y, z) = \ln |xyz| \;$ na $D(F)$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 6xy - 2z$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $F(x, y, z) = -y^3 + 3xy + 3xz - 12z$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $F(x, y, z) = 6xz + 4y + 8z - 2x^3 - 2y^2 - z^2$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $F(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2 - 6yz + 2x + 4z$

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ lokální minimum v bodě $[-3, 2, -1]$; $\boxed{\mathbf{2}}$ sedlo v bodě $[5, -1, 2]$; $\boxed{\mathbf{3}}$ lokální maximum v bodě $[5, -1, -2]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ lokální minimum v bodě $[-1, -2, 3]$; $\boxed{\mathbf{5}}$ lokální maximum v bodě $[1, 1, 1]$; $\boxed{\mathbf{6}}$ lokální maximum v bodě $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\boxed{\mathbf{7}}$ nejsou podezřelé body, tedy ani lokální extrémy; $\boxed{\mathbf{8}}$ lokální minimum v bodě $[6, 18, 1]$, sedlo v bodě $[0, 0, 1]$; $\boxed{\mathbf{9}}$ sedlo v bodě $[4, 2, -2]$, sedlo v bodě $[4, -2, 2]$; $\boxed{\mathbf{10}}$ lokální maximum v bodě $[4, 1, 16]$, sedlo v bodě $[-1, 1, 1]$; $\boxed{\mathbf{11}}$ sedlo v bodě $[-1, 1, 1]$, sedlo v bodě $[-1, 2, 4]$.