## 4. cvičení

Určete obsah množiny pomocí dvojného integrálu:

$\boxed{\mathbf{1}}$ uzavřený trojúhelník s vrcholy $[0,0],\ [1,3],\ [9,3]$

$\boxed{\mathbf{2}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $y \geqq x^2,\ y \leqq 2-x,\ x \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leqq x \leqq y \leqq 3$

$\boxed{\mathbf{4}}$ množina omezená křivkami $y = \dfrac{1}{x},\ x+y = \dfrac{5}{2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ uzavřený trojúhelník s vrcholy $[0,0],\ [2,0],\ [1,1]$

$\boxed{\mathbf{6}}$ množina omezená křivkami $y = x^2,\ y = x+2$

$\boxed{\mathbf{7}}$ množina omezená křivkami $x = y^2,\ x = 4y^2-3$

$\boxed{\mathbf{8}}$ uzavřený rovnoběžník s vrcholy $[-2,0],\ [0,0],\ [1,1],\ [-1,1]$

$\boxed{\mathbf{9}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leqq x+y \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x$

$\boxed{\mathbf{10}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $x \geqq 0,\ x^2 \leqq y \leqq x+2$

$\boxed{\mathbf{11}}$ množina omezená křivkami $x \cdot e^y = 1,\ x = e^y,\ y = \ln 2$

$\boxed{\mathbf{12}}$ množina omezená křivkami $y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{cotg} x,\ y = 0,$ kde $x \in \langle 0, \dfrac{\pi}{2}\rangle$

$\boxed{\mathbf{13}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $-2 \leqq x \leqq 2,\ |x| \leqq y \leqq 1$

$\boxed{\mathbf{14}}$ množina omezená křivkami $y = \sin x,\ 2x = \pi y$

$\boxed{\mathbf{15}}$ množina omezená verzierou s rovnicí $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ a přímkou $y = 1$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $y \in \langle 0,3\rangle,\ x \in \langle \frac{y}{3}, 3y\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \langle 0,1\rangle,\ y \in \langle x^2, 2-x\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in \langle 1,3\rangle,\ y \in \langle x,3\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in \langle \frac{1}{2}, 2\rangle,\ y \in \langle \frac{1}{x}, \frac{5}{2}-x\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $y \in \langle 0,1\rangle,\ x \in \langle y, 2-y\rangle$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $x \in \langle -1,2\rangle,\ y \in \langle x^2, x+2\rangle$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $y \in \langle -1,1\rangle,\ x \in \langle 4y^2-3, y^2\rangle$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $y \in \langle 0,1\rangle,\ x \in \langle y-2, y\rangle$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $x \in \langle \frac{1}{3}, 1\rangle$, rozděleno na $x \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\rangle,\ y \in \langle 1-x, 2x\rangle$ a $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\rangle,\ y \in \langle x, 2x\rangle$ a $x \in \langle \frac{2}{3}, 1\rangle,\ y \in \langle x, 2-x\rangle$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $x \in \langle 0,2\rangle,\ y \in \langle x^2, x+2\rangle$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $y \in \langle 0, \ln 2\rangle,\ x \in \langle e^{-y}, e^y\rangle$; $\boxed{\mathbf{12}}$ $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, rozděleno na $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle,\ y \in \langle 0, \operatorname{tg} x\rangle$ a $x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\rangle,\ y \in \langle 0, \operatorname{cotg} x\rangle$; nebo: $y \in \langle 0,1\rangle,\ x \in \langle \operatorname{arctg} y, \operatorname{arccotg} y\rangle$; $\boxed{\mathbf{13}}$ $y \in \langle 0,1\rangle,\ x \in \langle -y, y\rangle$; nebo: $x \in \langle -1,1\rangle,\ y \in \langle |x|, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{14}}$ $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ rozděleno na $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle,\ y \in \langle \sin x, \frac{2x}{\pi}\rangle$ a $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ y \in \langle \frac{2x}{\pi}, \sin x\rangle$; $\boxed{\mathbf{15}}$ $x \in \langle -2,2\rangle,\ y \in \langle 1, \frac{8}{x^2+4}\rangle$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ 12; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{7}{6}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ 2; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{15}{8} - 2\ln 2$; $\boxed{\mathbf{5}}$ 1; $\boxed{\mathbf{6}}$ $\frac{9}{2}$; $\boxed{\mathbf{7}}$ 4; $\boxed{\mathbf{8}}$ 2; $\boxed{\mathbf{9}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $\frac{10}{3}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\mathbf{12}}$ $\ln 2$; $\boxed{\mathbf{13}}$ 1; $\boxed{\mathbf{14}}$ $2 - \frac{\pi}{2}$; $\boxed{\mathbf{15}}$ $2\pi - 4$.

Určete $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x,y) = x + y$

$M$ množina bodů splňujících nerovnosti $y^2 \leqq x \leqq y$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$

$M$ množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leqq xy,\ 0 \leqq y \leqq x \leqq 2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$

$M$ množina bodů splňujících nerovnosti $x^2 < y,\ y^2 < x$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x,y) = x^2$

$M$ množina bodů splňujících nerovnosti $x^4 \leqq y^2 \leqq x^2$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x,y) = \cos(x+y)$

$M$ množina omezená křivkami $x = 0,\ x = y,\ y = \pi$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x,y) = x^2 y$

$M$ množina bodů splňujících nerovnosti $x^2 + y^2 \leqq r^2,\ y \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f(x,y) = x^2 y$

$M$ množina bodů splňujících nerovnost $x^2 + y^2 \leqq r^2$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y}}$

$M$ množina bodů splňujících nerovnosti $0 < y < 1,\ 0 < x < 2$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $f(x,y) = \dfrac{1}{2y - x}$

$M$ uzavřený trojúhelník s vrcholy $[1,1],\ [2,4],\ [3,2]$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{y}}$

$M$ otevřená množina, kterou v I. kvadrantu vymezuje astroida $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $f(x,y) = (2 - x) \cdot y$

$M$ množina omezená kolmou kisoidou s rovnicí $y^2 = \dfrac{x^3}{2 - x}$ a přímkou $y = x$

$\boxed{\mathbf{12}}$ $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$

$M$ otevřená množina omezená kolmou strofoidou $(x^2 + y^2)(x - 2) + x = 0$
v polorovině $y > 0$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $f(x,y) = \left|\dfrac{2y}{x}\right|$

$M$ otevřená množina omezená kolmou strofoidou $(x^2 + y^2)(x - 2) + x = 0$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $y \in \langle 0,1\rangle,\ x \in \langle y^2, y\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \langle 1,2\rangle,\ y \in \langle \frac{1}{x}, x\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in (0,1),\ y \in (x^2, \sqrt{x})$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in \langle -1,1\rangle,\ y \in \langle -x, -x^2\rangle \cup \langle x^2, x\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in \langle 0,\pi\rangle$, $y \in \langle x, \pi\rangle$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $x \in \langle -r, r\rangle,\ y \in \langle 0, \sqrt{r^2-x^2}\rangle$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $x \in \langle -r, r\rangle$, $y \in \langle -\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}\rangle$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $y \in (0,1),\ x \in (0,2)$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $x \in \langle 1,3\rangle$, rozděleno na $x \in \langle 1,2\rangle,\ y \in \langle \frac{x+1}{2}, 3x-2\rangle$ a $x \in \langle 2,3\rangle,\ y \in \langle \frac{x+1}{2}, 8-2x\rangle$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $x \in (0,1)$, $y \in (0, \sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3})$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $x \in \langle 0,1\rangle,\ y \in \langle \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}, x\rangle$; $\boxed{\mathbf{12}}$ $x \in (0,1)$, $y \in (0, \sqrt{\frac{x}{2-x} - x^2})$; $\boxed{\mathbf{13}}$ $x \in (0,1),\ y \in (-\sqrt{\frac{x}{2-x}-x^2}, \sqrt{\frac{x}{2-x}-x^2})$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{3}{20}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{9}{4}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3}{5}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{5}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $-2$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $\frac{2r^5}{15}$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $0$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $\frac{10\sqrt{5}}{3} - 6$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $\frac{6}{5}\ln 6 - 1$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $\frac{3}{16}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $\frac{1}{12}$; $\boxed{\mathbf{12}}$ $\ln 2 - \frac{1}{2}$; $\boxed{\mathbf{13}}$ $2\ln 2 - 1$.