

10. cvičení

Určete obsah/objem množiny dané nerovnostmi :

- 1** $x^2 + y^2 \leq 3, |x| \geq y$
- 2** $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x$
- 3** $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \leq \sqrt{3}x$
- 4** $x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3, y^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{4}$
- 5** $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 2$
- 6** $x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x$
- 7** $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x$
- 8** $x^2 + y^2 + 3 \leq z, x^2 + y^2 + z \leq 5$
- 9** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0$
- 10** $x^2 + 4y^2 \leq 16z^2, x \leq 2y, 0 \leq z \leq 1$

Mezivýsledky — meze integrálů: **1** $\rho \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle, \varphi \in \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \rangle$; **2** $\rho \in \langle 1, 3 \rangle, \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$;
3 $\rho \in \langle 1, 3 \rangle, \varphi \in \langle -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$; **4** $\rho \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle, \varphi \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$; **5** $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
 $z \in \langle 0, 2 \rangle, \rho \in \langle 0, z \rangle$; **6** $\rho \in \langle 0, 1 \rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle, z \in \langle \frac{\rho^2}{2}, \rho^2 \rangle$; **7** $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
 $\rho \in \langle 1, 2 \rangle, z \in \langle 0, 4 - \rho \cos \varphi \rangle$; **8** $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \rho \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle \rho^2 + 3, 5 - \rho^2 \rangle$;
9 $\rho \in \langle 0, 1 \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \alpha \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle$; **10** zobecněné válcové $x = 2\rho \cos \varphi,$
 $y = \rho \sin \varphi, z = z,$ potom $\rho \in \langle 0, 2 \rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle, z \in \langle \frac{\rho}{2}, 1 \rangle$ nebo $z \in \langle 0, 1 \rangle,$
 $\rho \in \langle 0, 2z \rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle$.

Výsledky: **1** $\frac{9}{4}$; **2** $\frac{4\pi}{3}$; **3** 4π ; **4** $\frac{\pi}{2}$; **5** $\frac{8\pi}{3}$; **6** $\frac{\pi}{8}$; **7** 12π ; **8** π ; **9** $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$;
10 $\frac{4\pi}{3}$.

Určete $\iint_M f(x, y) dx dy$, resp. $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$, je-li:

- 1** $f(x, y) = x - y$
 M množina bodů splňujících nerovnosti $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq -y \geq 0$
- 2** $f(x, y) = 3y$
 M množina bodů splňujících nerovnosti $(x^2 + y^2)^3 \leq x^4, x \geq 0, y \geq 0$
- 3** $f(x, y, z) = 6(x + y + z)$
 M množina bodů splňujících nerovnosti $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1$

$$\boxed{4} \quad f(x, y, z) = 8xyz$$

M množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$\boxed{5} \quad f(x, y, z) = \frac{y}{xz}$$

M množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$,

$$2z \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 0 \leq y \leq x$$

$$\boxed{6} \quad f(x, y, z) = z^2$$

M množina bodů splňujících nerovnosti $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{1}$ $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}, 0 \rangle$, $\rho \in \langle 0, 2 \rangle$; $\boxed{2}$ $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, $\rho \in \langle 0, \cos^2 \varphi \rangle$; $\boxed{3}$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $z \in \langle 0, 1 \rangle$, $\rho \in \langle 0, z \rangle$; $\boxed{4}$ $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$, $z \in \langle 0, \rho^2 \rangle$; $\boxed{5}$ $\rho \in \langle 1, 2 \rangle$, $\alpha \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$; $\boxed{6}$ $\alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle$, $z \in \langle 0, 2 \rangle$.

Výsledky: $\boxed{1}$ $\frac{8}{3}$; $\boxed{2}$ $\frac{1}{7}$; $\boxed{3}$ $\frac{3\pi}{2}$; $\boxed{4}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{5}$ $\frac{3}{4} \ln^2 2$; $\boxed{6}$ $\frac{32\pi}{45}$.