9. cvičení

Určete objem množiny pomocí trojného integrálu:

$\boxed{\mathbf{1}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1$

$\boxed{\mathbf{2}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq x + y + z \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $z \geqq y^2,\ z \leqq 2 - y,\ 0 \leqq x \leqq z$

$\boxed{\mathbf{4}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq z \leqq x^2 - y^2$

$\boxed{\mathbf{5}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $x + y \leqq 3,\ 2 \leqq x + z \leqq 3,\ x \geqq 1,\ y \geqq 0$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in \langle 0, 1\rangle,\ y \in \langle x, 1\rangle,\ z \in \langle y, 1\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \langle 0, 1\rangle$, $y \in \langle 0, 1 - x\rangle,\ z \in \langle 0, 1 - x - y\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $y \in \langle -2, 1\rangle,\ z \in \langle y^2, 2 - y\rangle,\ x \in \langle 0, z\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in \langle 0, 2\rangle,\ y \in \langle -x, x\rangle,\ z \in \langle 0, x^2 - y^2\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in \langle 1, 3\rangle,\ y \in \langle 0, 3-x\rangle, z \in \langle 2-x, 3-x\rangle$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{6}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{6}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{36}{5}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{16}{3}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ 2.

Určete $\iiint_M f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x, y, z) = x - y + z$
M množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x, y, z) = xyz$
M množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq z \leqq 1 - x,\ x \leqq y \leqq 2x$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x, y, z) = \dfrac{x + z}{\sqrt{y}}$
M množina bodů splňujících nerovnosti $2 - 2x < y < 2 - x,\ z^2 < y < 2$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$
M množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq z \leqq y \leqq x \leqq 2\pi$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x, y, z) = \sin(x + y + z)$
M množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq z \leqq y \leqq x \leqq \pi$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in \langle 0, 1\rangle,\ z \in \langle x, 1\rangle,\ y \in \langle x, z\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \langle 0, 1\rangle$, $y \in \langle x, 2x\rangle,\ z \in \langle 0, 1 - x\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $y \in (0, 2),\ x \in (1 - \frac{y}{2}, 2 - y),\ z \in (-\sqrt{y}, \sqrt{y})$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $z \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ x \in \langle z, 2\pi\rangle,\ y \in \langle z, x\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $z \in \langle 0, \pi\rangle,\ x \in \langle z, \pi\rangle,\ y \in \langle z, x\rangle$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{12}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{80}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ 2; $\boxed{\mathbf{4}}$ 0; $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\frac{4}{3}$.

Určete obsah/objem množiny dané nerovnostmi :

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x^2+y^2 \leqq 3,\ |x| \geqq y$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ y \leqq \sqrt{3}x$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $x^2+y^2 \leqq z^2,\ 0 \leqq z \leqq 2$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $x^2+y^2 \leqq 2z,\ z \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq x$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq z \leqq 4-x$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ x^2+y^2 \leqq z^2,\ z \geqq 0$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\rho \in \langle 0,\sqrt{3}\rangle,\ \varphi \in \langle \frac{3\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\rho \in \langle 1,3\rangle,\ \varphi \in \langle 0,\frac{\pi}{3}\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\rho \in \langle 1,3\rangle,\ \varphi \in \langle -\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\varphi \in \langle 0,2\pi),\ z \in \langle 0,2\rangle,\ \rho \in \langle 0,z\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $\rho \in \langle 0,1\rangle,\ \varphi \in \langle \frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\rangle,\ z \in \langle \frac{\rho^2}{2},\rho^2\rangle$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $\varphi \in \langle 0,2\pi),\ \rho \in \langle 1,2\rangle,\ z \in \langle 0,4-\rho\cos\varphi\rangle$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $\rho \in \langle 0,1\rangle,\ \varphi \in \langle 0,2\pi),\ \alpha \in \langle \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\rangle$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{9\pi}{4}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{4\pi}{3}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ 4π; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{8\pi}{3}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{8}$; $\boxed{\mathbf{6}}$ 12π; $\boxed{\mathbf{7}}$ $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$.

Určete $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, resp. $\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x,y)=x-y$

M množina bodů splňujících nerovnosti $x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq -y \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x,y)=3y$

M množina bodů splňujících nerovnosti $(x^2+y^2)^3 \leqq x^4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x,y,z)=6(x+y+z)$

M množina bodů splňujících nerovnosti $x^2+y^2 \leqq z^2,\ 0 \leqq z \leqq 1$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x,y,z)=8xyz$

M množina bodů splňujících nerovnosti $0 \leqq z \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x,y,z)=z^2$

M množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 4,$

$$0 \leqq 2z \geqq \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ 0 \leqq y \leqq x$$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{4},0\rangle,\ \rho \in \langle 0,2\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\varphi \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle,\ \rho \in \langle 0,\cos^2\varphi\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\varphi \in \langle 0,2\pi),\ z \in \langle 0,1\rangle,\ \rho \in \langle 0,z\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\varphi \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle,\ \rho \in \langle 0,1\rangle,\ z \in \langle 0,\rho^2\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $\rho \in \langle 1,2\rangle,\ \alpha \in \langle 0,\frac{\pi}{6}\rangle,\ \varphi \in \langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{8}{3}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{7}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3\pi}{2}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{31\pi}{480}$.