7. cvičení

Spočtěte:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-x}^{x} \cos(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{y} 2y\cdot e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{1+y^2}}^{1+y} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\displaystyle\int_0^e \int_{-x}^{x} e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\displaystyle\int_1^4 \int_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} \sqrt{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^3}^{\frac{1}{y^3}} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{3}{14}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ 1; $\boxed{\mathbf{3}}$ $3-e$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ e^2-1; $\boxed{\mathbf{6}}$ $\frac{e}{2}(e^2-1)$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $\frac{104}{5}$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $\frac{54}{7}$.

Určete obsah množiny pomocí dvojného integrálu:

$\boxed{\mathbf{1}}$ uzavřený trojúhelník s vrcholy $[0,0],\ [1,3],\ [9,3]$

$\boxed{\mathbf{2}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $y \geqq x^2,\ y \leqq 2-x,\ x \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leqq x \leqq y \leqq 3$

$\boxed{\mathbf{4}}$ množina omezená křivkami $y = \dfrac{1}{x},\ x+y = \dfrac{5}{2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ množina omezená křivkami $y = x^2,\ y = x+2$

$\boxed{\mathbf{6}}$ množina omezená křivkami $x = y^2,\ x = 4y^2-3$

$\boxed{\mathbf{7}}$ uzavřený rovnoběžník s vrcholy $[-2,0],\ [0,0],\ [1,1],\ [-1,1]$

$\boxed{\mathbf{8}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leqq x+y \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x$

$\boxed{\mathbf{9}}$ množina bodů splňujících nerovnosti $x \geqq 0,\ x^2 \leqq y \leqq x+2$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $y \in \langle 0,3\rangle,\ x \in \langle \frac{y}{3}, 3y\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \langle 0,1\rangle$, $y \in \langle x^2, 2-x\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in \langle 1,3\rangle,\ y \in \langle x,3\rangle$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in \langle \frac{1}{2}, 2\rangle,\ y \in \langle \frac{1}{x}, \frac{5}{2}-x\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in \langle -1,2\rangle,\ y \in \langle x^2, x+2\rangle$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $y \in \langle -1,1\rangle,\ x \in \langle 4y^2-3, y^2\rangle$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $y \in \langle 0,1\rangle$, $x \in \langle y-2, y\rangle$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $x \in \langle \frac{1}{3}, 1\rangle$, rozděleno na $x \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\rangle,\ y \in \langle 1-x, 2x\rangle$ a $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\rangle$, $y \in \langle x, 2x\rangle$ a $x \in \langle \frac{2}{3}, 1\rangle,\ y \in \langle x, 2-x\rangle$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $x \in \langle 0,2\rangle,\ y \in \langle x^2, x+2\rangle$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ 12; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{7}{6}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ 2; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{15}{8} - 2\ln 2$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{9}{2}$; $\boxed{\mathbf{6}}$ 4; $\boxed{\mathbf{7}}$ 2; $\boxed{\mathbf{8}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $\frac{10}{3}$.

Určete $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x,y) = x + y$
M množina bodů splňujících nerovnosti $y^2 \leqq x \leqq y$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$
M množina bodů splňujících nerovnosti $1 \leqq xy,\ 0 \leqq y \leqq x \leqq 2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$
M množina bodů splňujících nerovnosti $x^2 < y,\ y^2 < x$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x,y) = x^2$
M množina bodů splňujících nerovnosti $x^4 \leqq y^2 \leqq x^2$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x,y) = \cos(x + y)$
M množina omezená křivkami $x = 0,\ x = y,\ y = \pi$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x,y) = 2xy$
M uzavřený rovnoběžník s vrcholy $[1,0],\ [2,1],\ [4,0],\ [5,1]$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f(x,y) = \dfrac{1}{2y - x}$
M uzavřený trojúhelník s vrcholy $[1,1],\ [2,4],\ [3,2]$

Mezivýsledky — meze integrálů: $\boxed{\mathbf{1}}$ $y \in \langle 0,1\rangle,\ x \in \langle y^2, y\rangle$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \langle 1,2\rangle,\ y \in \langle \frac{1}{x}, x\rangle$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in (0,1),\ y \in (x^2, \sqrt{x})$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in \langle -1,1\rangle,\ y \in \langle x^2, |x|\rangle \cup \langle -|x|, -x^2\rangle$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in \langle 0,\pi\rangle$, $y \in \langle x,\pi\rangle$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $y \in \langle 0,1\rangle,\ x \in \langle y+1, y+4\rangle$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $x \in \langle 1,3\rangle$, rozděleno na $x \in \langle 1,2\rangle$, $y \in \langle \frac{x+1}{2}, 3x-2\rangle$ a $x \in \langle 2,3\rangle,\ y \in \langle \frac{x+1}{2}, 8-2x\rangle$.

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{3}{20}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{9}{4}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3}{5}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{5}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ -2; $\boxed{\mathbf{6}}$ $\frac{19}{2}$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $\frac{6}{5}\ln 6 - 1$.

$\boxed{\clubsuit}$ Jaký je obsah množiny omezené verzierou s rovnicí $y = \frac{8}{x^2+4}$ a přímkou $y = 1$?

$\boxed{\spadesuit}$ Určete $\iint_M \frac{x}{\sqrt[3]{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li M otevřená množina, kterou v I. kvadrantu vymezuje astroida $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$.