Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání

Matematika a její aplikace

(Metodická doporučení s ilustrativními úlohami)

Autorský tým

Doc. RNDr. Helena Binterová, Ph.D.	Katedra matematiky PdF JU České Budějovice
RNDr. Růžena Blažková, CSc.	Katedra matematiky PdF MU Brno
Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.	Ústav matematiky a statistiky PřF MU Brno
RNDr. Marie Kupčáková, Ph.D.	Katedra matematiky PdF Univerzity Hradec Králové
RNDr. Hana Lišková	VOŠ pedagogická a Střední pedagogická škola Litomyšl
Mgr. Eva Nováková, Ph.D.	Katedra matematiky PdF MU Brno
Mgr. Pavel Rezek	ZŠ Cerekvice nad Loučnou
Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.	Katedra matematiky a didaktiky matematiky PedF UK Praha
Mgr. Marta Vrtišová	ZŠ Matice školské České Budějovice
RNDr. Eva Zelendová	Národní ústav pro vzdělávání (NÚV)

Obsah

Úvod

Eduard Fuchs

Zavedení *Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* (RVP ZV) a následná tvorba školních vzdělávacích programů (ŠVP) patří k největším systémovým změnám v našem školství v posledních desetiletích. Jako vždy má každá taková změna své pozitivní i negativní stránky. Na jedné straně ponechala přílišná stručnost jednotlivých výstupů v RVP ZV školám značnou volnost při tvorbě ŠVP, na druhé straně však nezajistila srovnatelnou úroveň absolventů všech základních škol (ZŠ) v České republice. Když se v roce 2010 rozhodlo o plošném testování žáků ZŠ, bylo nezbytné stanovit pro toto testování závaznou úroveň znalostí a dovedností. Tato snaha vyústila v tvorbu *Standardů pro základní vzdělávání*. Plošné testování žáků[1] 5. a 9. ročníků bylo sice po několika ověřovacích pokusech ukončeno, standardy pro vzdělávací obory Český jazyk a literatura, Cizí jazyk a Matematika a její aplikace se však ukázaly být životaschopné a učitelé je vesměs vítali jako užitečný materiál doplňující RVP ZV. Proto se 1. 9. 2013 výše uvedené standardy, které jsou zpracovány pro tzv. minimální úroveň, staly závaznou přílohou RVP ZV.

Přes příznivý ohlas standardů jsme si na desítkách setkání s učiteli základních škol, na řadě seminářů konaných v letech 2013-2015 a na dalších akcích ověřili, že učitelé by přivítali podrobnější materiál, než jsou uvedené standardy matematiky. Často učitelé poukazovali na to, že ilustrativní úlohy uváděné ve standardech jsou jen k vybraným indikátorům konkretizujícím očekávané výstupy RVP ZV, a ještě jen na minimální úrovni. Standardy nepopisují vyšší úroveň vědomostí a dovedností žáků, neobsahují žádné metodické návody pro práci v hodinách, nepomáhají učitelům v práci se žáky se speciálními vzdělávacími potřebami apod. Tato zjištění nás přivedla k myšlence vypracovat pro učitele podrobnější materiál, který by uvedené náležitosti obsahoval a který by mohl usnadnit náročnou učitelskou práci.

Na textech, které vám předkládáme, se podílela řada odborníků z vysokých škol i učitelů z praxe. Snažili jsme se u každého tematického okruhu (dle RVP ZV) popsat nejdůležitější a nejtěžší stránky příslušné výuky. Očekávané výstupy doprovázíme vzorovými úlohami ve třech úrovních (minimální, optimální, excelentní) tak, abychom učitelům poskytli materiály nejen pro práci se žáky na té nejnižší úrovni, ale i pro práci se žáky velmi dobrými a talentovanými, kteří se i dnes ve třídách vyskytují. Zvláštní kapitolu jsme věnovali práci s žáky se speciálními vzdělávacími potřebami. Náročnost této práce jen velmi těžko pochopí ten, kdo s takovými dětmi ve třídě nepracoval. Ilustrativní úlohy, které uvádíme, pocházejí z různých zdrojů. Většinu jich vytvořili autoři jednotlivých kapitol, někdy se však jevilo jako vhodné užít i příklady „odjinud“[2]. Zvláštní místo v této souvislosti zaujímají uvolněné příklady z mezinárodních šetření TIMSS a PISA. Ilustrativní úlohy, které byly na řadě škol ověřovány, jsou (na rozdíl od standardů) doplněny možnými postupy řešení a metodickými komentáři, které by měly pomoci zejména začínajícím učitelům.

Dobře víme, že pro úroveň školství, jednotlivých škol a tříd, nejsou rozhodující žádné materiály ani vyhlášky nebo učebnice, ale osobnosti vyučujících. Jen na nich záleží, zda výuka žáky samotné i jejich učitele těší. Budeme velmi rádi, když Metodické komentáře k takové výuce pomohou.

---

[1] V celém textu je třeba chápat pojmy učitel a žák ve významu učitel/učitelka, žák/žákyně apod.

[2] Jestliže byl autorům jednotlivých kapitol zdroj ilustrativní úlohy znám, je u ilustrativní úlohy uveden odkaz.

1. Struktura Metodických komentářů a obtížnost ilustrativních úloh

Eva Zelendová

Jak již bylo v úvodu řečeno, s platností od 1. září 2013 jsou Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy do *Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* zařazeny jako příloha *Standardy pro základní vzdělávání* pro vzdělávací obory Český jazyk a literatura, Cizí jazyk a Matematika a její aplikace. Standardy, které jsou stanoveny jako konkretizované očekávané výstupy na konci prvního a druhého stupně, jsou tvořeny indikátory a ilustrativními úlohami. Indikátory stanovují minimální úroveň obtížnosti, která je ještě ilustrována prostřednictvím úloh. Cílem *Metodických komentářů ke Standardům pro základní vzdělávání* (dále jen Metodické komentáře) je pomoci učitelům při naplňování vzdělávacích cílů stanovených v RVP ZV dalšími podněty pro plánování této činnosti i pro jejich přímou vyučovací činnost.

Teoretická část metodických komentářů, které se vztahují ke čtyřem tematickým okruhům vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace (Číslo a početní operace/Číslo a proměnná, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a prostoru, Nestandardní aplikační úlohy a problémy) obsahuje přesnou citaci charakteristiky tematického okruhu dle RVP ZV a zásadní metodická doporučení či obecné postřehy vztahující se k výuce uvedeného tématu, která jsou společná pro první i druhý stupeň ZŠ. Tato doporučení jsou pro první a druhý stupeň dále upřesněna. Pro přehlednost jsou uvedeny i očekávané výstupy a indikátory dle Standardů pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace.

Teoretická část metodických komentářů je doplněna tzv. ilustrativními úlohami, které sice nemohou pokrýt celou škálu úloh a aktivit pro žáky, vztahují se však k danému tematickému okruhu a umožní čtenářům lépe pochopit některá úskalí výuky matematiky. Při práci s těmito úlohami čtenáře zcela jistě napadnou různé modifikace předložených problémů (např. s využitím podpůrných pomůcek) či další zajímavé úlohy a aktivity. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých ilustrativních úloh nejsou jediné možné. Žáci budou objevovat další cesty, jak danou úlohu řešit. Protože zápisy řešení, obrázky a schémata, která žáci během svých řešení vytváří, mají pro pedagogickou činnost učitele velký význam, jsou u některých úloh uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi. Na závěr každého tematického okruhu jsou uvedeny informační zdroje společně pro první i druhý stupeň.

Jako základ pro nastavení tří úrovní ilustrativních úloh (minimální, optimální a excelentní) byla pro potřeby Metodických komentářů použita Bloomova taxonomie kognitivních výukových cílů[3]. (Bloomova taxonomie je jedna z nejvýznamnějších pedagogických teorií, která ovlivňuje koncepce plánování výuky a tvorby kurikula. Její přínos je vnímán především z hlediska naznačení způsobu konkretizace a operacionalizace vzdělávacích cílů.[4])

Cílové kategorie jsou řazeny podle rostoucí náročnosti. K vymezování cílů v jednotlivých kategoriích byly vytvořeny systémy typických tzv. aktivních sloves. Pro nastavení minimální úrovně indikátorů byla zvolena první a druhá úroveň osvojení Bloomovy taxonomie (zapamatování, pochopení), pro nastavení optimální úrovně třetí a čtvrtá úroveň osvojení (aplikace a analýza), pro excelentní úroveň pátá a šestá úroveň nastavení (syntéza, hodnocení).

[3] http://wiki.ped.muni.cz/index.php?title=Bloomova_taxonomie_v%C3%BDukov%C3%BDch_c%C3%ADl%C5%AF

[4] SKALKOVÁ, J. *Obecná didaktika*. Praha: Grada, 2007

Cílová kategorie (úroveň osvojení)	Typická slovesa k vymezování cílů
1. Zapamatování termíny a fakta, jejich klasifikace a kategorizace	definovat, doplnit, napsat, opakovat, pojmenovat, popsat, přiřadit, reprodukovat, seřadit, vybrat, vysvětlit, určit
2. Pochopení překlad z jednoho jazyka do druhého, převod z jedné formy komunikace do druhé, jednoduchá interpretace, extrapolace (vysvětlení)	dokázat, jinak formulovat, ilustrovat, interpretovat, objasnit, odhadnout, opravit, přeložit, převést, vyjádřit vlastními slovy, vyjádřit jinou formou, vysvětlit, vypočítat, zkontrolovat, změřit
3. Aplikace použití abstrakcí a zobecnění (teorie, zákony, principy, pravidla, metody, techniky, postupy, obecné myšlenky v konkrétních situacích)	aplikovat, demonstrovat, diskutovat, interpretovat údaje, načrtnout, navrhnout, plánovat, použít, prokázat, registrovat, řešit, uvést vztah mezi, uspořádat, vyčíslit, vyzkoušet
4. Analýza rozbor komplexní informace (systému, procesu) na prvky a části, stanovení hierarchie prvku, princip jejich organizace, vztahů a interakce mezi prvky	analyzovat, provést rozbor, rozhodnout, rozlišit, rozčlenit, specifikovat
5. Syntéza složení prvků a jejich částí do předtím neexistujícího celku (ucelené sdělení, plán nebo řada operací nutných k vytvoření díla nebo jeho projektu, odvození souboru abstraktních vztahů k účelu klasifikace nebo objasnění jevů	kategorizovat, klasifikovat, kombinovat, modifikovat, napsat sdělení, navrhnout, organizovat, reorganizovat, shrnout, vyvodit obecné závěry
6. Hodnocení posouzení materiálů, podkladů, metod a technik z hlediska účelu podle kritérií, která jsou dána nebo která si žák sám navrhne	argumentovat, obhájit, ocenit, oponovat, podpořit (názory), porovnat, provést kritiku, posoudit, prověřit, srovnat s normou, vybrat, uvést klady a zápory, zdůvodnit, zhodnotit

Význam uvedených typických sloves k vymezování úrovně je třeba vždy konkretizovat ve spojení se vzdělávacím oborem Matematika a její aplikace (např. sloveso *definovat* v 1. úrovni je třeba chápat pouze ve významu porozumění definici, nikoliv ve významu samostatné formulace přesné matematické definice). Na závěr je třeba připomenout, že pro dosažení vyšší cílové kategorie je nutné zvládnout učivo v rámci nižší cílové kategorie.

Metodické komentáře ke čtyřem tematickým okruhům RVP ZV jsou doplněny kapitolou *Žáci se speciálními vzdělávacími potřebami*, ve které jsou shrnuty základní principy výuky matematiky pro tuto žákovskou skupinu.

2. Tematické okruhy Číslo a početní operace, Číslo a proměnná

Eva Nováková (1. stupeň), Naďa Vondrová (2. stupeň)

RVP ZV: *V tematickém okruhu Čísla a početní operace na prvním stupni, na který navazuje a dále ho prohlubuje na druhém stupni tematický okruh Číslo a proměnná, si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací.*

Oblast *Čísla* zahrnující přirozená, racionální a reálná čísla a témata jako procenta a dělitelnost patří mezi oblasti matematiky s významnými přesahy do každodenního života, jejichž důkladné pochopení tvoří základ zvládnutí dalších partií matematiky.

Proměnná a algebraické výrazy představují vstup do abstraktní matematiky. Jejich porozumění je nutným předpokladem pro pokročilejší matematiku.

Na 1. a 2. stupni ZŠ můžeme vysledovat několik důležitých společných rysů.

- Je nutné vycházet ze zkušeností žáků z reálného světa. U číselných oborů je to až na iracionální čísla věc zřejmá. Nicméně i u algebraických výrazů a rovnic lze začít od reálných situací a ty popisovat pomocí proměnných a operací s nimi.
- Výuka je opřena o modely: např. prsty, tečky na hrací nebo dominové kostce, různá počitadla či peněžní soustava (přirozená čísla), teploměr, panáček na číselné ose či dluhy (záporná čísla), koláčový, obdélníkový a tyčový model či kuličky (zlomky), obrazce v geometrii a jejich míra (algebraické výrazy), váhy (rovnice).
- Společným a velmi důležitým modelem pro všechny číselné obory včetně iracionálních čísel, s nimiž se žáci na základní škole začínají seznamovat, je číselná osa. Pomocí číselné osy lze čísla vizualizovat, prohlubovat pochopení jejich velikosti a uspořádání v číselném kontinuu či vést žáky k porozumění principu zaokrouhlování čísel.
- Pochopení čísel v daném číselném oboru i operací s nimi se zprvu opírá o manipulativní činnosti, kdy dochází prostřednictvím modelů k pochopení algoritmu a následné abstrakci. Žák pak dokáže operace provádět bez sémantické opory. Dobrá představa o podstatě algoritmů pro operace s čísly pomáhá zamezit jejich nesprávnému transferu mimo oblast jejich platnosti. Výuka zaměřená na mechanické počítání pomocí různých návodů či vzorců může být krátkodobě úspěšná, ovšem pravidla uchopená jen pamětí se nutně začnou žákům plést v okamžiku, kdy jejich počet naroste.
- Výuka opřená o modely umožňuje účinnou individualizaci práce. Každý žák potřebuje jiný čas na to, aby problematice porozuměl. Je tedy možné, aby někteří žáci ještě využívali modelů, zatímco jiní již pracují na abstraktní úrovni.
- Proměnná a algebraické výrazy představují pro žáka základní školy nejvyšší stupeň abstrakce. Opírají se o tři pilíře: číselné výrazy, geometrii a vzorce pro délku, obsah a objem, úlohy na zobecňování se silnou vazbou na pojem funkce. Algebraické výrazy by tedy měly být představovány v těchto třech kontextech a měli bychom se vyvarovat předčasné formalizaci pravidel.

Závěrem je třeba zdůraznit důležitost opakovaných návratů k již probranému učivu. U operací v rámci uvedených číselných oborů nestačí na jednom příkladu ukázat, jak fungují, ale i po vyvození příslušných pravidel by se učitelé měli vracet na úroveň modelů, aby k propojování představy a algoritmů docházelo opakovaně. Totéž platí pro oblast proměnné a algebraických výrazů.

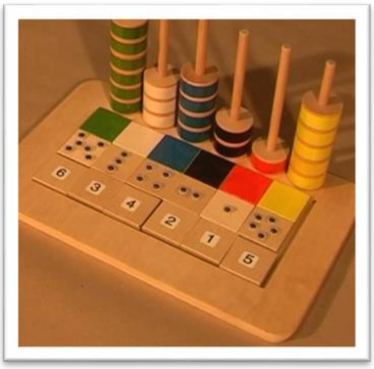
První stupeň ZŠ

Pro **1. období 1. stupně** ZŠ uvádí RVP ZV pět závazných očekávaných výstupů.

Žák

- používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků
- čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti
- užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose
- provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly
- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace.

Tematický okruh *Číslo a početní operace* tradičně tvoří těžiště elementárního matematického vyučování. Charakteristickým znakem je vzájemná propojenost a souvislost aritmetických poznatků, jejichž vytváření se opírá o zkušenosti žáků s reálným světem. Přirozené číslo jako základní pojem matematického vzdělávání na 1. stupni je postupně budováno s využitím tradičních modelů (např. prstů, teček na hrací nebo dominové kostce, číselných obrazců, dvacítkového a stovkového počitadla, později s využitím modelu peněžní soustavy a řádového počitadla).



Pro metodiku vyučování je typické postupné proměňování činností žáků – od spontánních a didaktických her a manipulací s konkrétními předměty k systematickému učení, které směřuje k efektivnímu osvojování matematických poznatků. Přirozený, spontánní dětský projev se postupně převádí na přesnější jazyk elementárního matematického vyučování, který doprovází postupné vytváření abstraktního pojmu přirozeného čísla.

Přitom se nevyhýbáme ani vytvoření představy čísla 0 (nula) jako kvantity prázdné množiny, resp. početnosti prázdného souboru, ve smyslu významového porozumění, tj. umět propojit operaci s reálnou situací:

a) v konfrontaci s představou početnosti neprázdné množiny (na stole jsou 4 knihy, dvě tužky, 5 listů papíru, *žádná* pastelka)

b) jako rozdíl stejných čísel

- na talíři byly 4 koláče, Jarda snědl všechny čtyři, žádný nezbyl (4 – 4 = 0),
- na talíři byly 4 koláče, Mirek snědl 2, Jana také 2, žádný nezbyl (4 – 2 – 2 = 0) atd.

Numerace, tj. znázorňování, čtení a zapisování přirozených čísel, jejich porovnávání a zaokrouhlování se postupně rozšiřuje nejprve do 10, pak do 20 (základní spoje sčítání a odčítání), později do 100 (základní spoje násobení a dělení – násobilka) a do 1 000 (princip dekadické početní soustavy – jednotky, desítky, stovky). Používají se termíny číslo (ve významu početnosti souboru), číslice (jako dohodnutý symbol k označení čísla v desítkové soustavě), pracuje se s číslovkami základními (jedna, dvě,…) a řadovými (první, druhý,…).

Názorná představa početní operace se zprvu opírá o manipulativní činnosti a o různé interpretace početních operací v daném oboru numerace (sčítání jako sjednocení a přidávání, odčítání jako ubírání, násobení jako součet stejných sčítanců, dělení jako rozdělování na části a po částech).

Porozumění podstatě početní operace je východiskem k dovednosti efektivně provádět operaci zpaměti a písemně. Užití vhodného univerzálního modelu (prsty, počitadla, peněžní soustava) k vyjádření početní operace umožňuje postupně zavádět jednoduchou terminologii a symboliku (plus, minus, krát, děleno, sčítanec, součet, menšenec, menšitel, rozdíl, činitel, součin, dělenec, dělitel, podíl).

Zvyšování kvality a celkové kultury numerických výpočtů, rozvíjení počtářských dovedností – odhad výsledku, kontrola správnosti výpočtu (opakováním výpočtu, záměnou sčítanců, resp. činitelů, obráceným početním výkonem), pořadí výpočtů v početním výrazu, užívání početních výhod – umožňuje efektivně využívat osvojený matematický aparát, směřovat ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci.

Žáci při výpočtech poznávají a využívají vzájemné souvislosti (inverzní charakter sčítání a odčítání, násobení a dělení) a vlastnosti početních operací (komutativnost, asociativnost, distributivnost, nulový prvek sčítání – číslo 0, jednotkový prvek násobení – číslo 1). Osvojování dovednosti početních operací zpaměti a písemně, především nácvik základních početních spojů sčítání, odčítání, násobení a dělení v oboru násobilky až do jejich automatizace, přispívá k rozvíjení krátkodobé paměti žáků jako předpokladu pro osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů.

Je třeba připomenout význam číselné osy jako nástroje vizualizace. Využívá se jí k porovnávání čísel, ke znázornění sčítání a odčítání, i při poznávání souvislosti čísla a jeho obrazu na číselné ose. Žák získává důležitý matematický nástroj k řešení úloh.

Výstupy tematického okruhu *Číslo a početní operace* mají zásadní význam pro aplikaci matematických poznatků v reálné životní praxi prostřednictvím řešení a tvorby učebních úloh. Úlohy mají charakter matematizace reálných situací. Učitel postupuje od zadání obrázkem, z něhož je třeba „přečíst“ podmínky úlohy i otázku, k zadání souvislým textem. Porozumění textu úlohy je předpokladem „překódování“ přirozeného jazyka, který byl použit v zadání slovní úlohy, na vyjádření matematickým jazykem. Žák řeší, obměňuje a tvoří slovní úlohy s náměty z reálných životních situací a zkušeností, využívá osvojené znalosti početních operací při řešení aplikačních úloh různými způsoby (např. numerické řešení, grafické řešení).

Při řešení slovních úloh lze využít dramatizaci, kterou budeme ilustrovat na následující slovní úloze. *Snědl jsem 8 jahod a pět mi jich zůstalo. Kolik jsem měl původně jahod?* Žák na lavici položí 8 obrázků jahod (to jsou ty, které snědl) a napočítá 5 dalších (ty mu zbyly). Celkový počet zjistí sečtením všech jahod na lavici. Při dramatizaci slovní úlohy si žák lépe uvědomuje popisovanou změnu stavu.

Nedílnou součástí řešení úlohy je odhad a kontrola správnosti výpočtu, posouzení reálnosti výsledku a formulace slovní odpovědi. Při tvorbě a řešení aplikačních úloh žák dokáže propojit poznatky z reálné životní praxe i z různých vzdělávacích oborů, je u něj rozvíjena např. čtenářská, přírodovědná nebo finanční gramotnost.

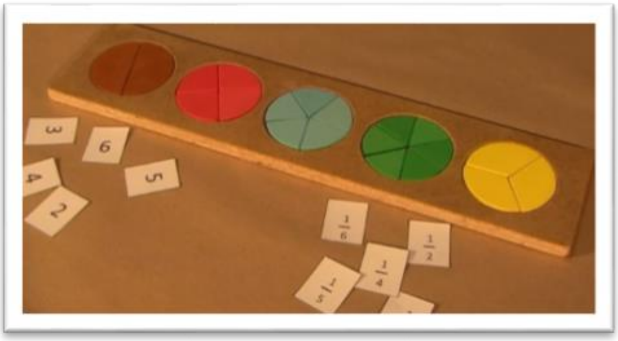
Pro **2. období uvádí RVP ZV** osm očekávaných výstupů (viz níže).

V návaznosti na 1. období se prohlubují poznatky o početních výkonech a jejich vlastnostech v oboru přirozených čísel. Procvičují a upevňují se vlastnosti komutativnosti (záměna sčítanců nebo činitelů) a asociativnosti (sdružování sčítanců nebo činitelů) na příkladech sčítání a násobení zpaměti. Upevňují se pravidla pořadí výpočtů v číselném výrazu, význam závorky, využívá se „přednost“ násobení a dělení před sčítáním a odčítáním a početní výhody.

Žák rozvíjí poznatky o desítkové číselné soustavě, zapíše vícemístné přirozené číslo rozvinutým zápisem, seznamuje se s významem řádu cifry pro porovnávání čísel a pro porozumění algoritmu početní operace. Osvojuje si algoritmy písemného sčítání, odčítání, násobení a dělení. Při písemných výpočtech žák poznává algoritmus jako významný nástroj k řešení úloh, intuitivně poznává vlastnosti algoritmu. Vyjadřuje jej slovy (slovní popis, komentář k výpočtu – posloupnost kroků tvořených elementárními operacemi) a postupně i matematickou symbolikou. Seznamuje se s operací „dělení se zbytkem“, dělí jednociferným dělitelem. Systematicky provádí odhady a kontrolu správnosti výsledků řešení. Využívá vlastností početních operací a inverzních operací k provádění zkoušky správnosti výpočtu. Správnost výpočtu kontroluje jeho opakováním, případně s využitím kalkulátoru.

Zkušenosti se zaokrouhlováním přirozených čísel z 1. období žák postupně rozvíjí a zpřesňuje. Aplikuje obecné pravidlo pro zaokrouhlování, zdůvodňuje smysluplnost, užitečnost či nutnost zaokrouhlování přirozených čísel na úlohách z praxe. Je veden k věcné argumentaci a zdůvodňování potřeby zaokrouhlování přirozených čísel v úlohách z praxe: kdy je výhodné (nebo dokonce nutné) pracovat se zaokrouhlenými čísly, jak jich využít k provádění odhadu výsledku početní operace, k posouzení správnosti výsledku početní operace. Současně objevuje případná „rizika“ výpočtů se zaokrouhlenými čísly – obsahují vždy určitou míru nepřesnosti, která se zaokrouhlováním souvisí. Uplatňuje pravidla pro zaokrouhlování přirozených čísel i v jednoduchých případech zaokrouhlování desetinných čísel (při aplikaci a modelování reálných situací).

Žák řeší jednoduché a složené slovní úlohy (se dvěma a více početními operacemi). Vybírá vhodné informace z reality a vytváří z nich úlohy. Aplikuje osvojené poznatky při převodech jednotek délky, hmotnosti, času a objemu, které zná z běžného života.



Poznatky z řešení úloh v oboru přirozených čísel žák uplatňuje i při vytváření matematického modelu využívajícího zlomky a desetinná čísla. Obor přirozených čísel se tak rozšiřuje na čísla kladná racionální, reprezentovaná kladnými zlomky a kladnými desetinnými čísly.

Žák využívá při vytváření intuitivní představy zlomku (jako části celku, jako podílu dvou přirozených čísel) a desetinného čísla zkušenosti z běžného života. Intuitivně pracuje s představou zlomku také při každém rozdělování celku na stejné části, tedy již při manipulativních činnostech doprovázejících představu dělení. Představu zlomku si vytváří na vhodných modelech celku, který se dělí na stejné části. Osvojuje si potřebnou terminologii a symboliku (čitatel, jmenovatel, zlomková čára).

Ve vhodných situacích se vyjadřuje vztah „celek a jeho část“ nejen přirozenými čísly, ale také zlomkem. Celek se přitom obvykle znázorňuje vhodnými geometrickými útvary: kruhem (v dětské zkušenosti reprezentovaný dortem, koláčem, pizzou), obdélníkem (využita může být i tabulka čokolády) nebo jiným *n*-úhelníkem, úsečkou (špejle, tyč, proužek papíru). Může však být vyjádřen i prvky navzájem oddělitelnými (sáček kuliček, bonboniéra, krabička sýrů). Představa zlomku jako části celku je spojována s procesem, kterým zlomek vznikal. Úlohy na určení zlomku jsou zprvu založeny na manipulativní činnosti, kterou lze ve vyučování provádět nebo imitovat: krájení koláče, překládání proužku papíru, lámání čokolády, rozdělování kuliček. Na základě vhodného znázornění řeší žák i úlohy z běžného života na určení celku z jeho části: „Tři čtvrtě kila banánů stojí 15 Kč, kolik stojí 1 kg?“

Obsah pojmu zlomek a desetinné číslo se dále obohacuje během jejich porovnávání. Žák porovnává, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem (poloviny, čtvrtiny, třetiny, pětiny, desetiny). Opírá se přitom o vhodný názor, vyjádřený např. ve čtvercové síti, na kruhovém diagramu nebo číselné ose. Využívá symbolický zápis početních operací a rovnosti zlomků.

Vycházíme ze skutečnosti, že každý zlomek lze vyjádřit ve tvaru desetinného rozvoje. Čísla 1/4[5] (zlomek) a 0,25 (desetinné číslo) jsou pouze dvě různé formy zápisu téhož racionálního čísla. Žák však zpočátku oba zápisy odlišuje, což odpovídá jeho zkušenostem z životní praxe. Rozšíření principu vyjádření čísla v dekadické číselné soustavě i „za desetinnou čárku“ je novým významným poznatkem, který žák využije při porovnávání desetinných čísel. Uvědomit si rovnost 1/2 = 0,5 nebo 7/20 = 0,35 vyžaduje další zpřesnění představy o zlomcích, desetinných zlomcích a desetinných číslech například jejich znázorněním na číselné ose.

Na závěr je třeba se ještě zmínit o dalším rozšíření číselných oborů, kterým je seznámení s pojmem záporné číslo. Východiskem pro intuitivní pochopení celého (záporného) čísla jsou žákům známé situace z životní praxe: teploměr (teploty „pod nulou“), vodní hladina („pod normál“), dluh.

Očekávané výstupy tematického okruhu *Číslo a početní operace* jsou pro 1. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace do níže uvedených konkrétnějších indikátorů (nastavených na minimální úroveň).

Očekávaný výstup	M-5-1-01 Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení
Indikátory	1. žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky 2. žák využívá komutativnost sčítání a násobení při řešení úlohy a při provádění zkoušky výpočtu 3. žák využívá asociativnost sčítání a násobení při řešení jednoduchých úloh s užitím závorek
Očekávaný výstup	M-5-1-02 Žák provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel
Indikátory	1. žák správně sepíše čísla pod sebe (dle číselných řádů) při sčítání, odčítání, násobení a dělení přirozených čísel 2. žák využívá při písemném výpočtu znalost přechodu mezi číselnými řády 3. žák využívá znalosti malé násobilky při písemném násobení a dělení nejvýše dvojciferným číslem 4. žák provádí písemné početní operace včetně kontroly výsledku 5. žák dodržuje pravidla pro pořadí operací v oboru přirozených čísel
Očekávaný výstup	M-5-1-03 Žák zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel
Indikátory	1. žák přečte a zapíše číslo (do milionů) s užitím znalosti číselných řádů desítkové soustavy 2. žák využívá rozvinutý zápis čísla (do statisíců) v desítkové soustavě 3. žák porovnává čísla do statisíců 4. žák zaokrouhluje čísla do statisíců s použitím znaku pro zaokrouhlování 5. žák užívá polohové vztahy („hned před“, „hned za“) v oboru přirozených čísel 6. žák se orientuje na číselné ose a jejích úsecích 7. žák provádí číselný odhad a kontrolu výsledku
Očekávaný výstup	M-5-1-04 Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel

[5] Zápis zlomku ve tvaru např. 1/4 je volen pouze z důvodů jednodušší grafické úpravy textu, u žáků vždy vyžadujeme zápis zlomku ve tvaru $\frac{1}{4}$.

Indikátory	1. žák porozumí textu jednoduché úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy) a úlohu řeší 2. žák zformuluje odpověď k získanému výsledku 3. žák vytvoří jednoduchou slovní úlohu podle vzoru
Očekávaný výstup	M-5-1-05 Žák modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku
Indikátory	1. žák vysvětlí a znázorní vztah mezi celkem a jeho částí vyjádřenou zlomkem na příkladech z běžného života 2. žák využívá názorné obrázky k určování 1/2, 1/4, 1/3, 1/5, 1/10 celku 3. žák vyjádří celek z jeho dané poloviny, čtvrtiny, třetiny, pětiny, desetiny
Očekávaný výstup	M-5-1-06 Žák porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel
Indikátory	1. žák porovná zlomky se stejným jmenovatelem (poloviny, čtvrtiny, třetiny, pětiny, desetiny) 2. žák sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem (poloviny, čtvrtiny, třetiny, pětiny, desetiny) pomocí názorných obrázků (např. čtvercová síť, kruhový diagram, číselná osa) a tyto početní operace zapisuje
Očekávaný výstup	M-5-1-07 Žák přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty
Indikátory	1. žák vysvětlí a znázorní vztah mezi celkem a jeho částí vyjádřenou desetinným číslem na příkladech z běžného života 2. žák přečte, zapíše, znázorní desetinná čísla v řádu desetin na číselné ose a jejích úsecích, ve čtvercové síti nebo v kruhovém diagramu 3. žák porovná desetinná čísla v řádu desetin
Očekávaný výstup	M-5-1-08 Žák porozumí významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose
Indikátory	1. žák znázorní na číselné ose, přečte, zapíše a porovná celá čísla v rozmezí –100 až +100 2. žák nalezne reprezentaci záporných čísel v běžném životě

Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Číslo a početní operace*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Sečti čísla na řádku a ve sloupci.
Součty zapiš na řádek vpravo a pod sloupec.
Výsledky porovnej.

	10		
22	115	8	____
	20		
	____		

Možná řešení s metodickým komentářem

Žák se může rozhodnout, zda sčítat písemně nebo zpaměti s využitím komutativnosti (početní výhoda: 22 + 8 + 115). Zápis čísel ve sloupci přímo nabízí sčítání písemné, ale malá obtížnost dává příležitost i ke sčítání zpaměti. Jedná se o rutinní výpočet, kontrola správnosti výpočtu vyplývá z rovnosti obou výsledků. Součet v řádku i ve sloupci je 145, součty se sobě rovnají.

Očekávaný výstup	M-5-1-01 Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení.

Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Doplň do prázdných míst taková čísla, aby součet čísel v řádku i ve sloupci byl stejný.

24		46	___
	13		
	88		

Možná řešení s metodickým komentářem

Žák musí volit správnou posloupnost výpočtů. Nejprve doplní součet na konec řádku a dopočítá jeden ze sčítanců. Využije při tom znalost sčítání a odčítání (pamětného či písemného). Poté dopočítá poslední chybějící číslo.

Řešení:
88 – (24 + 46) = 18, číslo 18 dopíšeme doprostřed kříže,
88 – (13 + 18) = 57, číslo 57 doplníme do horního pole.

Očekávaný výstup	M-5-1-01 Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení.

Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

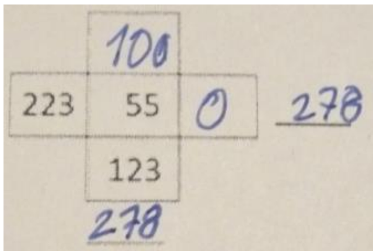
Doplň chybějící čísla do tabulky i na konec řádku a pod sloupec. Součet čísel v řádku i sloupci musí být stejný.

223	55		___
	123		
	___		

Možná řešení s metodickým komentářem

Jedná se o otevřenou úlohu. Žák si může nejprve zvolit libovolný součet, který je větší nebo roven 278, a dopočítat každého ze sčítanců (např. součet 279 = (223 + 55) + 1 a z toho 279 = (123 + 55) + 101). Lze postupovat i od volby jednoho sčítance, přes dopočítání součtu a druhého sčítance. Žáci objevují vztah mezi chybějícími sčítanci a součty.
Pro žáky je někdy tento typ úlohy obtížný právě pro její otevřenost. Zejména v aritmetické oblasti očekávají jednoznačné zadání příkladů „na procvičení".
Někdy žáci doplní nejprve jednoho ze sčítanců a tím si úlohu rozloží na sled jednoduchých příkladů odpovídajících předchozí úloze. V takové situaci je vhodné položit žákovi otázku: „Můžeme začít doplněním součtů?"

Konkrétní doplnění čísel záleží na volbě součtu nebo jednoho sčítance. V ukázce žákovského řešení vidíme „minimalistické pojetí" (třetí sčítanec je nula), které dobře vystihuje vztah mezi dvojicemi sčítanců.



Očekávaný výstup	M-5-1-01 Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení.

Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Na stole máš karty s pěti číslicemi: 4, 8, 2, 9, 5.

A) Vytvoř ze všech těchto číslic nejprve nejmenší a pak největší číslo. Urči rozdíl obou čísel.

B) Vytvoř ze všech číslic nejmenší číslo. Potom navzájem zaměň dvě karty tak, aby rozdíl původního a nového čísla byl co největší. Urči tento rozdíl.

C) Vytvoř ze všech číslic nejmenší číslo. Potom nahraď jednu číslici tak, aby nové číslo bylo větší a zároveň dávalo po vydělení třemi co nejmenší zbytek. Můžeš použít libovolnou číslici od 0 do 9, ale každá z číslic může být použita v čísle pouze jednou. Najdi všechna taková čísla.

Možná řešení s metodickým komentářem

A)
Řešení:
Nejmenší číslo je 24 589, největší 98 542, rozdíl je 73 953.
Pro žáky, kteří mají problém s pochopením zápisu čísla, lze využít doplňující aktivitu:

- vymodelování daného čísla (reálné předměty, řádové počítadlo)
- vytvoření zápisu čísla pomocí navršení kartiček s vyjádřením řádu číslice (např. pro číslo 24 589 použijeme kartičky 20 000, 4 000, 500, 80, 9).

B)
Řešení:
Nejmenší číslo je 24 589, nové číslo 94 582, rozdíl 69 993.

C)
Protože žáci neznají pravidla pro určení dělitelnosti číslem 3, řeší úlohu opakovaným dělením nově vytvořeného čísla. Nejmenší možný zbytek je roven nule. Vedeme žáky k tomu, aby při hledání nových čísel postupovali systematicky.

Řešení:
Nejmenší číslo je 24 589, které není dělitelné třemi.
Jestliže budeme nahrazovat první číslici v zápisu, můžeme použít vzhledem k daným podmínkám (číslice se nesmí opakovat a nové číslo má být větší než číslo původní) jen číslice 3, 6 a 7.
34 589 není dělitelné třemi, 64 589 není dělitelné třemi, 74 589 je dělitelné třemi.
Podobně postupujeme při nahrazování dalších číslic.
Jestliže budeme nahrazovat druhou číslici v zápisu, můžeme použít vzhledem k daným podmínkám jen číslice 6 a 7.
26 589 je dělitelné třemi, 27 589 není dělitelné třemi.
Jestliže budeme nahrazovat třetí číslici v zápisu, můžeme použít vzhledem k daným podmínkám jen číslice 6 a 7.
24 689 není dělitelné třemi, 24 789 je dělitelné třemi.
Číslice 8 a 9 v původním čísle nelze za zadaných podmínek ničím nahradit.
Hledaná čísla jsou 74 589, 26 589 a 24 789.

Očekávané výstupy	M-5-1-02 Žák provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel. M-5-1-04 Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel.

Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Na oslavu upekla babička dva velké kulaté koláče (frgály). Každý koláč rozkrojila nejprve na čtyři stejné části, potom každý díl ještě na 3 stejné dílky.

A) Kolik dílků celkem vytvořila?

B) Každý účastník oslavy si vzal jeden dílek a ještě 3 dílky zbyly. Kolik bylo účastníků oslavy? Zapiš zlomkem, jaká část koláče zbyla.

C) Čtyři účastníci oslavy snědli po dvou dílcích koláče, ostatní po jednom. Kolik bylo účastníků oslavy, když žádný dílek nezbyl?

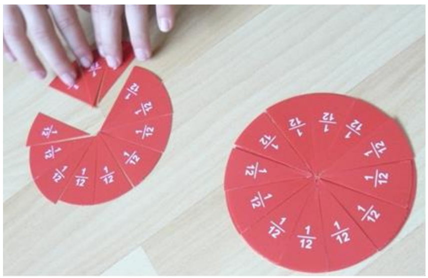
Možná řešení s metodickým komentářem

Při řešení vycházíme z kreslení obrázků koláčů nebo modelování situace např. na kruhové zlomkovnici. Pokud to žáci zvládají, řeší úlohu „pouze" v představách.

A)
Řešení úlohy je založeno na představě zlomku – dělení celku na stejné části. Je třeba uvažovat, že rozdělujeme dvakrát (jednou celý koláč na 4 části, poté každý dílek na 3 části – celek představuje jedna čtvrtina celého koláče). Z jednoho koláče se vytvoří 12 dílků, ze dvou koláčů 24 dílků.

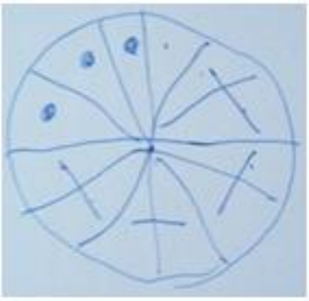
B)
Z jednoho koláče se mohlo podělit 12 účastníků oslavy (4 · 3 = 12).
Ze dvou koláčů se mohlo podělit 24 účastníků (12 · 2 = 24).
Protože 3 dílky zbyly, na oslavě bylo 21 účastníků (24 – 3 = 21).

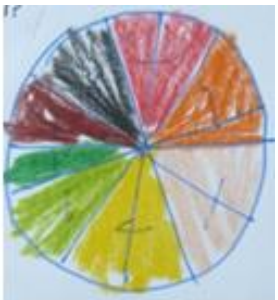
Zbyly 3/24 koláče, to je 1/8.



C)
Z jednoho koláče se mohlo podělit 12 účastníků oslavy (4 · 3 = 12), ze dvou koláčů 24 (12 · 2 = 24) za předpokladu, že každý snědl právě jeden dílek. Čtyři účastníci „jedli za dva“, snědli po dvou dílcích. Proto bylo na oslavě skutečně přítomno jen 20 účastníků (24 – 4 = 20).

Při modelování této situace žáci nejdříve vytvoří dva koláče, každý rozdělený na 12 dílků. Poté vytvoří čtyři skupinky po dvou dílcích a zbylé dílky nechají samostatně. Na závěr nepočítají jednotlivé dílky, ale vzniklé skupinky.
K vytvoření čtyř skupin po dvou dílcích postačí provést dělení u jednoho koláče a přičíst 12 jednotlivých dílků z druhého koláče.





Očekávané výstupy	M-5-1-05 Žák modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku. M-5-1-06 Žák porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel

Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

A	**B**	**C**	**Č**	**D**	**Ď**	**E**	**F**	**G**	**H**	**CH**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**Ř**
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
S	**Š**	**T**	**Ť**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**Ž**
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Tabulka přiřazuje jednotlivým písmenům české abecedy čísla.
Když sečteš čísla odpovídající jednotlivým písmenům, získáš tím hodnotu celého slova.
(Délku samohlásek nerozlišuj, A má stejnou číselnou hodnotu jako Á.)

A) Podle uvedeného pravidla přiřaď čísla slovům: BÁC, TÁC, SOJKA, DVOJKA.
B) K názvům zvířat v ZOO (ANTILOPA, LEV, SVIŠŤ) přiřaď z nabídky 50, 108, 113 odpovídající číslo.
C) Jaké slovo můžeš přiřadit číslu 16?

Možné řešení s metodickým komentářem

A)
Žáci si musí pečlivě přepsat hodnotu písmen. Při sčítání volí většinou pamětné sčítání.
BÁC: 2 + 1 + 3 = 6
TÁC: 25 + 1 + 3 = 29
SOJKA: 23 + 18 + 13 + 14 + 1 = 69
DVOJKA: 5 + 28 + 18 + 13 + 14 + 1 = 79

Vybraná slova je možné si rozdělit do skupin po dvou a využít skutečnosti, že uvedené dvojice mají společné skupiny písmen. Ve skupině slov BÁC, TÁC spočítáme hodnotu ÁC (1 + 3) a přičteme jednou 2 (B) a podruhé 25 (T). U slov SOJKA a DVOJKA spočteme skupinu OJKA (18 + 13 + 14 + 1). Jednou přičteme SO (23 + 18) a podruhé DV (5 + 28).

B)
Pokud žák nevyužije nabídku čísel, postupuje stejně jako v první úloze. Žáci, kteří s nabídkou pracují, využívají především odhad součtu. K nejdelšímu slovu napíší největší číslo, k nejkratšímu nejmenší. Musí však zkontrolovat, zda tomuto přiřazení odpovídají součty, protože kratší slovo může mít větší součet než slovo delší (např. VŮZ: 28 + 27 +32 = 87, DVOJKA: 79).
Nabídku čísel je možné rozšířit a tím výběr ztížit.

C)
Žáci zjistí, že nebudou používat písmena, kterým je přiřazeno v tabulce číslo větší než 16. Většinou přiřazují číslu 16 slovo HAD. Někteří objevují i zkratku bankovního institutu KB, či popěvek LA.
Proto je třeba předem domluvit, zda půjde například pouze o hledání podstatných jmen.

Očekávané výstupy	M-5-1-04 Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel. M-5-1-01 Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení.

Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Doplň do vět chybějící údaje (využij nabídku pod textem):

V Česku byla naměřena nejnižší teplota téměř ....

Nejvyšší naměřená teplota na Zemi se blíží ....

V Česku nejvyšší naměřená teplota těsně překročila ....

Led na rybníce taje při teplotě ....

Nejnižší naměřená teplota na Zemi těsně přesáhla ....

Nabídka: 0°C, –93°C, 40°C, –42°C, 58°C

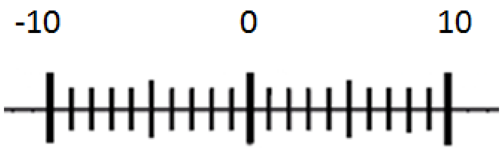
Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci zapisují údaje do vět, zvažují reálnost situace. Doplňuje se zde kontextová stránka s představou samotného čísla.

Očekávaný výstup	M-5-1-08 Žák porozumí významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose.

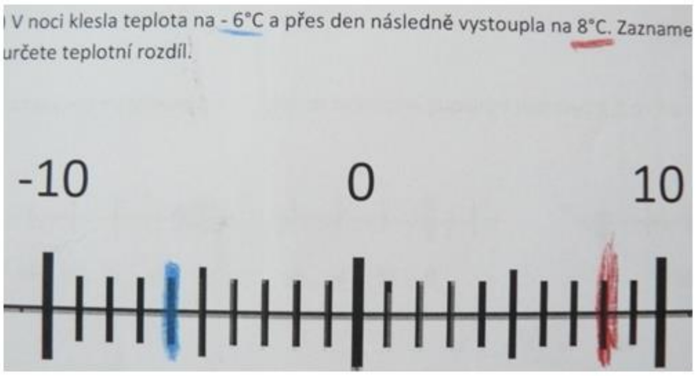
Ilustrativní úloha 9	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

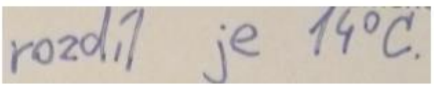
V noci klesla teplota na –6°C a přes den následně vystoupla na 8°C. Určete teplotní rozdíl. Údaje zaznamenejte na číselnou osu.



Možná řešení s metodickým komentářem

Podle potřeb žáků je dobré zvolit velikost číselné osy. K určení rozdílu dvou celých čísel musí mít dobrou představu jejich umístění na číselné ose.





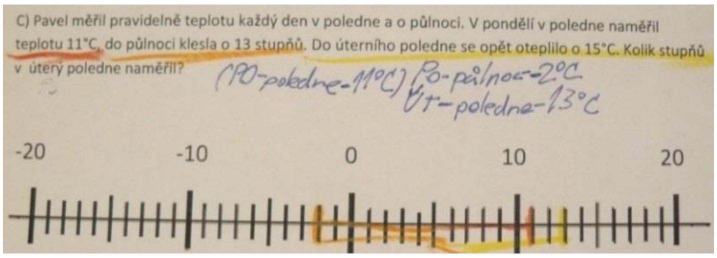
Očekávaný výstup	M-5-1-08 Žák porozumí významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose.

Ilustrativní úloha 10	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Pavel získal údaje z měření teploty v místě svého bydliště. Teplota byla měřena pravidelně každý den v poledne a o půlnoci. Zjistil, že v pondělí v poledne bylo 11°C, do půlnoci klesla o 13 stupňů. Do úterního poledne se opět oteplilo o 15°C. Kolik stupňů naměřili v úterý v poledne?

Možná řešení s metodickým komentářem

Žák pracuje s představou číselné osy v reálném kontextu, tj. teploměru. Musí umět vyznačit kladné i záporné celé číslo na číselné ose a dále na intuitivní úrovni (klesá – odčítání, oteplilo – přičítání) provádět operaci sčítání a odčítání v oboru celých čísel. Obtížnost úlohy je dána mírou využití číselné osy. Žáci mohou úlohu řešit s různou mírou názornosti, opory o číselnou osu. Od záznamu jednotlivých údajů na číselné ose včetně využití odpočítávání jednotlivých dílků, až po řešení bez opory o číselnou osu. Úlohu můžeme rozšířit o vytvoření vlastního modelu teploměru (číselné osy).



Očekávaný výstup	M-5-1-08 Žák porozumí významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose.

Ilustrativní úloha 11	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Před tebou jsou dvě hromádky kartiček. Na první hromádce jsou čísla, na druhé jsou zaokrouhlená čísla. Vytvoř dvojice kartiček (číslo a zaokrouhlené číslo), které k sobě patří.

1. hromádka
8 128 877; 1 379; 2 711 333; 12 856; 698 471; 24 901

2. hromádka
12 860; 2 700 000; 1 000; 698 500; 8 000 000; 25 000

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha předpokládá znalost čtení víceciferných čísel, pravidel zaokrouhlování přirozených čísel a struktury desítkové číselné soustavy.
Žák provede odhad. V tomto případě se lze orientovat například nejvyšším řádem daného čísla. Například k číslu 2 711 333 může být přiřazeno pouze číslo 2 700 000.
Úlohu můžeme obměňovat počtem položek v jednotlivých hromádkách.

Očekávaný výstup	M-5-1-03 Žák zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel.

Ilustrativní úloha 12	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Před tebou jsou na třech hromádkách tři soubory kartiček. Najdi takové trojice kartiček (číslo, způsob zaokrouhlení čísla, zaokrouhlené číslo), které k sobě patří.

1. hromádka
8 128 877; 1 379; 2 711 333; 12 856; 698 471; 24 901
2. hromádka
zaokrouhlení na desítky, zaokrouhlení na stovky, zaokrouhlení na tisíce, zaokrouhlení na desetitisíce, zaokrouhlení na statisíce, zaokrouhlení na milióny
3. hromádka
12 860; 2 700 000; 1 000; 698 500; 8 000 000; 25 000

Možná řešení s metodickým komentářem

Žák si vybere číslo z první hromádky a hledá ve třetí číselné hromádce druhé číslo do dvojice. Ve druhé hromádce potom najde odpovídající zaokrouhlení (např. 2 711 333 a 2 700 000, zaokrouhlení na statisíce).
Úlohu můžeme obměňovat počtem položek v jednotlivých hromádkách i konkrétní volbou čísel. Kartičky můžeme poskytnout ve větším množství, než vyžaduje správné řešení.

Očekávaný výstup	M-5-1-03 Žák zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel.

Ilustrativní úloha 13	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Najdi a zapiš všechna čísla, která po zaokrouhlení na desítky dávají výsledek 12 000.

Možná řešení s metodickým komentářem

Úlohu je možné řešit experimentem. Například číslo 12 001 zaokrouhlíme na desítky, dostaneme číslo 12 000. Poté prověřujeme čísla větší i menší. Nejmenší hledané číslo, které je po zaokrouhlení na desítky rovno číslu 12 000, je číslo 11 995. Největší takové číslo je 12 004.

Očekávaný výstup	M-5-1-03 Žák zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel.

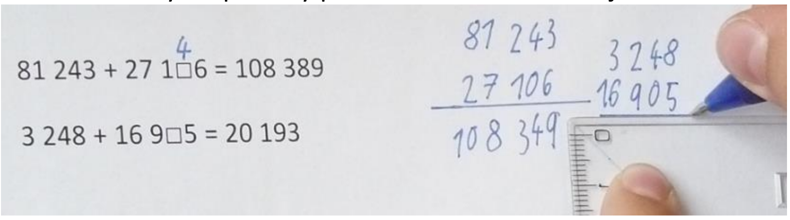
Ilustrativní úloha 14	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Doplň chybějící číslici na místo rámečku tak, aby byl součet správný.
81 243 + 27 1□6 = 108 389
3 248 + 16 9□5 = 20 193

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
81 243 + 27 146 = 108 389; 3 248 + 16 945 = 20 193
Žáci sčítají počty jednotek, desítek, stovek,...

V první úloze k doplnění cifry 4 nevyužívají sčítání s přechodem přes 10, ve druhé ano.
Žáci mohou přepsat zadání úlohy do podoby písemného sčítání nebo ji řešit bez tohoto přepisu.



Úlohu je možné řešit i na základě odčítání, např. 20 193 – 3 248 = 16 945.

Očekávaný výstup	M-5-1-02 Žák provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel.

Ilustrativní úloha 15	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Změň v každém sčítanci jednu číslici tak, aby součet zůstal stejný.
283 + 432 = 715

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha vede k hlubšímu porozumění algoritmu sčítání. Pokud zná žák jedno řešení, „vidí“ i ostatní. Např. 183 + 532 = 715 (změna cifer řádu stovek), 293 + 422 = 715 (změna cifer řádu desítek), 281 + 434 = 715 (změna cifer řádu jednotek).

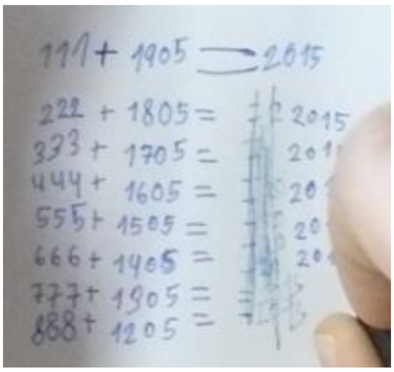
Očekávaný výstup	M-5-1-01 Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení.

Ilustrativní úloha 16	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Součet dvou (různých) čísel je 2015. Urči tato čísla, když víš, že jedno z čísel je trojciferné a má všechny tři číslice stejné. Najdi všechna řešení.

Možná řešení s metodickým komentářem

Sledujeme, zda považuje žák za řešení jednu dvojici sčítanců, které vyhovují daným podmínkám, nebo hledá všechna možná řešení. Pokud žáci najdou pouze jedno řešení, navážeme individuálně s žákem rozhovor podněcující ho k hledání dalších řešení.



Prvním krokem je nalezení čísla, které je trojciferné a má všechny tři číslice stejné. Pokud žáky na tento dílčí krok (nalezení jednoho ze sčítanců) upozorníme, úloha se zjednoduší na hledání druhého ze sčítanců. Takto vedení žáci často najdou jedno řešení, ale při výzvě k hledání dalších řešení, končí slovy "už nevím". Tím se vracíme k porozumění prvního kroku řešení úlohy.

Ač není uvedené žákovské řešení úplné, vidíme zde dobře porozumění vztahu obou sčítanců a součtu (žák dobře ví, jaký je součet, pokud se jeden ze sčítanců zvětší o 100 a výsledek zůstává stejný, pak musí být druhý ze sčítanců o 100 menší).

Očekávaný výstup	M-5-1-01 Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení.

Ilustrativní úloha 17	Obtížnost	**minimální**	optimální	excelentní

Soňa, Lenka, Ema a Anička si nachystaly na výlet pití. Soňa si vzala 0,5 litru šťávy, Lenka 0,3 litru vody, Ema 1 litr minerálky a Anička 0,7 litru džusu. Která z děvčat si nachystala nejvíce tekutin? Která nejméně?

Možná řešení s metodickým komentářem

Jednotka objemu 1 l (litr) je žákům dobře známá z reality. Desetinná čísla jsou volena tak, aby odpovídala obvyklým hodnotám ve skutečnosti. Řešení úlohy vyžaduje správně přečíst jednotlivá desetinná čísla a porovnat je: všechna čísla s výjimkou Emy jsou menší než 1.

Očekávaný výstup	M-5-1-07 Žák přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty

Ilustrativní úloha 18	Obtížnost	minimální	**optimální**	excelentní

Kamarádi Pavel, Tomáš a Zdeněk skákali do dálky. Pavel skočil 130 cm, Tomáš 150 cm a Zdeněk 110 cm. Paní učitelka si nezapsala délku jejich skoku v centimetrech, ale v metrech. Jaká čísla si zapsala? Vyznač je na číselné ose.

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení úlohy předpokládá znalost jednotek délky a jejich převodu: 1 m = 100 cm. Zápis délek skoků v metrech může být 1,30 m nebo 1,3 m, jednotlivé dílky na číselné ose představují desetiny.
Kontextovou stránku úlohy lze dále rozvíjet při tvorbě nových úloh. Například:
Vyznač na číselné ose svůj nejlepší výkon a porovnej ho s délkami skoků chlapců v zadání.
Výkony mohou být vyjádřeny desetinnými nebo přirozenými čísly.

Očekávané výstupy	M-5-1-07 Žák přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty. M-5-1-04 Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel.

Ilustrativní úloha 19	Obtížnost	minimální	optimální	**excelentní**

Bob Beamon byl v roce 2015 držitelem olympijského rekordu ve skoku do dálky výkonem o délce 8,9 metrů. Kolik jeho rekordu schází do 10 metrů?

Možná řešení s metodickým komentářem

Jedna desetina chybí do 9 metrů, tudíž do 10 metrů chybí 1,1 m.
Využití převodů jednotek: 8,9 m = 890 cm. 10 m = 1 000 cm, proto do 10 metrů schází 110 cm.
Kontextovou stránku úlohy lze dále rozvíjet při tvorbě nových úloh, např.:
Zjisti na internetu současnou hodnotu českého rekordu ve skoku dalekém a vypočítej, o kolik je jeho hodnota nižší než olympijský rekord.

Očekávané výstupy	M-5-1-07 Žák přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty M-5-1-04 Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel.

Druhý stupeň ZŠ

V oblasti přirozených čísel se na 2. stupni žáci věnují zejména dělitelnosti. Seznamují se se znaky dělitelnosti, které mohou vyvozovat sami na základě dosavadních zkušeností s dělením čísel, přičemž využívají kalkulačky. Řeší slovní úlohy pomocí znaků dělitelnosti a pojmů největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku.

Číselné obory se rozšiřují o celá a racionální čísla, přičemž základní představy o záporných číslech a zlomcích si žáci přinášejí již z 1. stupně. Pro výuku číselných oborů je zásadní, aby měli žáci dobrou představu o velikosti čísel a uměli odhadovat a zaokrouhlovat.

Se zápornými čísly se žáci 1. stupně seznamují na konkrétních modelech (teploměr, dluhy, krokování, prohry a výhry, výtah apod.). Na 2. stupni se pokračuje operacemi s celými čísly. Pro jejich zavedení s porozuměním je třeba, aby žáci uměli interpretovat záporné číslo nejen ve výše uvedených modelech, ale také ho uměli umístit na číselné ose.

Žáci by měli chápat podstatu algoritmů pro operace s celými čísly. Výborným modelem pro aditivní operace je např. pohyb panáčka po číselné ose. Kladnému číslu odpovídá pohyb panáčka vpřed, zápornému číslu odpovídá pohyb panáčka dozadu – couvání (musíme tedy u panáčka vědět, kam se „dívá“). Pokud zavedeme ještě povel „čelem vzad“ (panáček se otočí a pak provede příslušný povel[6]), získáme dobrý model pro „mínus před závorkou“. Tedy např. u výpočtu 2 – (–3) panáček provede dva kroky dopředu, čelem vzad (mínus před závorkou), tři kroky dozadu pozadu (tedy se vlastně pohybuje v kladném smyslu číselné osy), otočit zpět (závorka vpravo). Zpočátku mohou mít žáci k dispozici skutečného panáčka a číselnou osu, na které se pohybuje. Zadáváme stále větší čísla, aby se žáci postupně oprostili od modelu a přešli k počítání s celými čísly jen v představě. Model panáčka a číselné osy jim však umožní v budoucnu, pokud by algoritmus zapomněli, si postup znovu vybavit. Tento přístup umožňuje individualizaci práce, někteří žáci potřebují při řešení úloh oporu panáčka a číselné osy, jiní si jen představují pohyb po číselné ose, další jsou již schopni pracovat na abstraktní úrovni.

Model panáčka na číselné ose umožňuje smysluplné zavedení násobení kladného a záporného čísla pomocí opakovaného sčítání. Např. 2 · (–3) představuje dvakrát tři kroky dozadu. Pro násobení záporného a kladného čísla využijeme komutativitu násobení, kterou žáci již znají z oboru přirozených čísel. Problémem zůstává násobení dvou záporných čísel, pro které číselnou osou zřejmě smysluplně využít nelze. Zpravidla se tato operace zavádí pomocí číselné posloupnosti. Vycházíme z toho, co žáci znají: 2 · (–3) = –6; 1 · (–3) = –3; 0 · (–3) = 0. Výsledná čísla postupně vyznačujeme na číselné ose. Čísla na místě prvního činitele v součinu tvoří číselnou posloupnost 2, 1, 0, která pokračuje zápornými čísly –1, –2, –3 atd. Z reprezentace na číselné ose je názorně vidět, že i výsledky výpočtů tvoří číselnou posloupnost: –6, –3, 0, 3, 6, 9, a že tedy můžeme pokračovat (–1) · (–3) = 3; (–2) · (–3) = 6; (–3) · (–3) = 9 atd. Z toho je zřejmé, že výsledkem násobení dvou záporných čísel musí být zase kladné číslo. Dělení záporných čísel, resp. pravidla pro výsledné znaménko, lze zavést pomocí zkoušky. Žáci jsou již z 1. stupně zvyklí na provádění zkoušky u násobení a toho lze využít i zde, např. (–6) : (–2) = 3, protože platí 3 · (–2) = –6.

Kromě modelu číselné osy lze některé operace s celými čísly zavést např. na modelu teploměru či dluhu. Je otázkou, zda je v oblasti zavedení operací se zápornými čísly pro žáky rozmanitost modelů výhodou nebo zda je výhodnější pracovat v jednom modelu a reprezentovat tam vše, co smysluplně jde. Pokud budou operace s celými čísly zavedeny tak, aby žáci získali představu o podstatě jejich fungování, je pravděpodobné, že se podaří omezit nesprávné transfery pravidel. Např. to, že žáci aplikují zkratkovitě uchopené pravidlo „záporné a záporné dá kladné“ i na sčítání.

Představu o zlomku ve smyslu část celku si přinášejí žáci z 1. stupně, kde se používají různé modely. S nimi je však nutné pracovat i na 2. stupni.

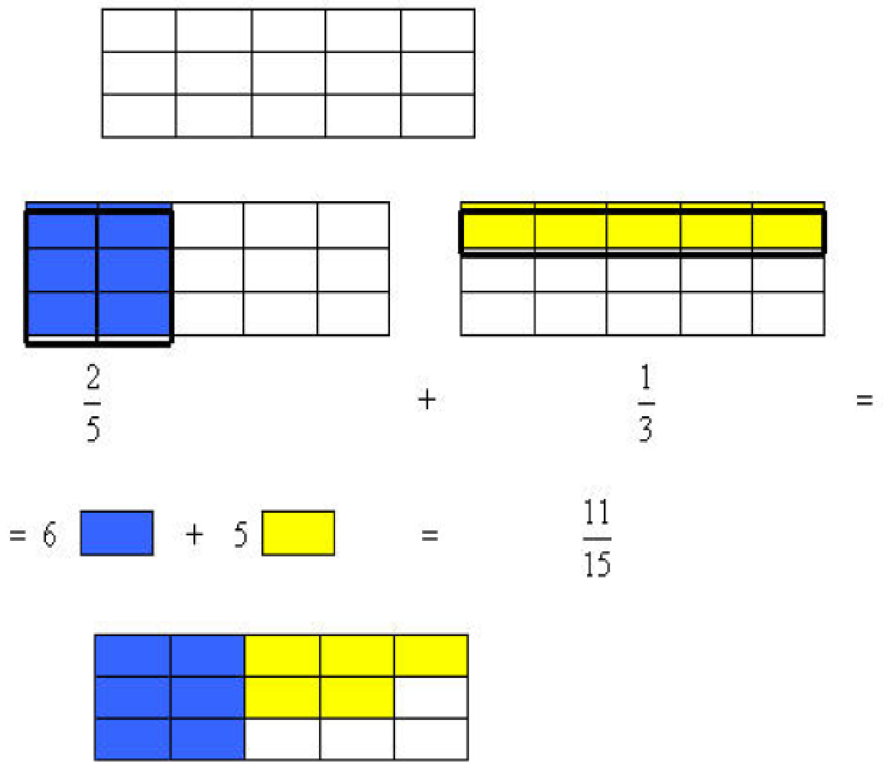
[6] Viz učebnice matematiky nakladatelství Fraus pro 1. stupeň autorského kolektivu vedeného M. Hejným.

Mezi nejčastěji používané modely patří koláčový (kruh, ciferník), obdélníkový (prázdný obdélník, čokoláda), úsečkový a diskrétní (kuličky). V českých učebnicích není kladen dostatečný důraz na číselnou osu jako jeden z modelů, kde lze zlomky reprezentovat. Zatímco při výuce desetinných čísel je číselná osa používána automaticky, u zlomků se často při vysvětlování omezujeme na jiné modely, které však např. nedovedou dobře reprezentovat zlomky větší než 1.

Jako zásadní pro zlomek v roli část-celek se jeví pochopení, s jakým celkem vlastně pracujeme. Zlomky se objevují v roli podílu a také poměru (např. 2 : 7) a pak je můžeme také rozšiřovat a krátit. Zlomek můžeme chápat také jako číslo, které lze umístit na číselnou osu. Pomocí číselné osy se zlomky začlení do číselného kontinua, které je prozatím obsazeno kladnými celými čísly, případně zápornými (podle toho, v jakém pořadí se vyučují zlomky a záporná čísla). Konečně zlomek se také objevuje v roli operátoru (tedy např. 2/3 z 12).

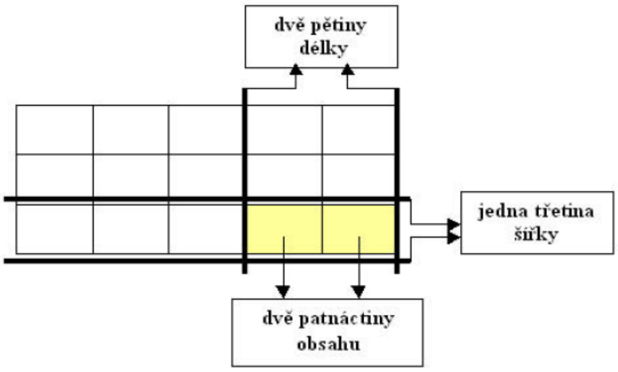
Stejný zlomek může být vyjádřen nekonečně mnoha různými zlomky i číslem s desetinným zápisem. Proto je důležitý pojem zlomku v základním tvaru, a tedy také krácení a rozšiřování zlomků. Pro představu ekvivalentních zlomků jsou výbornou pomůckou tzv. zlomkové zdi[7]. Zvláštní postavení mezi zlomky mají kmenové zlomky (zlomky s čitatelem rovným 1). Práce s nimi významně přispívá k lepšímu porozumění podstaty zlomku. Výše zmíněné modely se dají využít pro porovnávání zlomků i pro rozšiřování a krácení zlomků.

Pro operace se zlomky se jako nejvhodnější jeví model obdélníkový. Sčítat a odčítat zlomky se stejným jmenovatelem se žáci učí pomocí modelů už na 1. stupni. Na obrázku je nastíněno jedno možné vysvětlení sčítání zlomků s různým jmenovatelem pomocí převodu na společného jmenovatele. Převod je na modelu ukázán pro $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ pomocí rozdělení obdélníku ve svislém směru na tolik částí, kolik je jmenovatel prvního zlomku, a ve vodorovném směru na tolik částí, kolik je jmenovatel druhého zlomku.

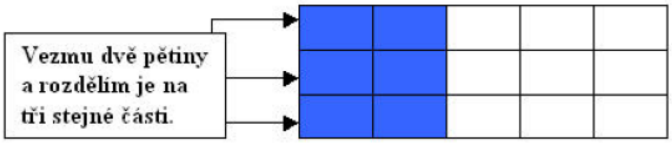


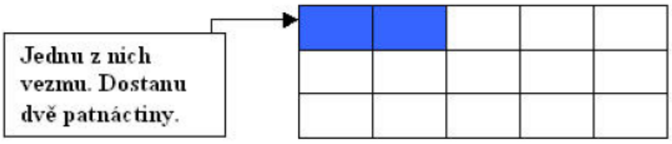
Pravidlo pro násobení zlomku přirozeným číslem lze vyvodit pomocí představy násobení jako opakovaného sčítání (např. $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$). U násobení dvou zlomků vycházíme z obdélníkového modelu a obsahu obdélníka (viz obrázek, kde je ukázán výpočet $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$).

[7] Např. http://www.snappymaths.com/counting/fractions/resources/equivalentwall.pdf.



Nejobtížnější je smysluplné zavedení dělení zlomků. Dělení zlomku přirozeným číslem je naznačeno na obrázku pro výpočet $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.





K pochopení toho, že dělení přirozeného čísla přirozeným číslem není to samé jako dělení zlomkem (v prvním případě se číslo zmenšuje, ve druhém případě to tak nemusí být), mohou pomoci různé reálné situace. Např. Mám 10 sušenek, když dám každému dítěti dvě, kolik dětí podělím? (5) Když dám každému jednu sušenku, kolik podělím? (10) Když dám každému polovinu sušenek, kolik dětí podělím? (20). Nebo rozléváme mléko do sklenic o různém objemu (Dva litry mléka rozléváme do půllitrových sklenic, kolik jich potřebujeme? Pak rozléváme do sklenic o objemu třetiny litru atd.[8]). Na základě reálné situace zapisujeme jednotlivé výpočty a jejich výsledky. Z řady konkrétních situací vyvodíme pravidlo pro dělení zlomků. Také lze vyjít z jednotlivých výpočtů typu $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \left(4 \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(4 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{8}{3} : 3 = \frac{8}{9}$ a z nich pak vyvodit pravidlo[9].

Při výuce zlomků si musíme být vědomi žákovských chyb, k nimž dochází díky přenosu zkušeností z oboru přirozených čísel (např. pro žáky je 1/5 větší než 1/4, protože 5 je větší než 4; žáci sčítají zlomky sečtením čitatelů a jmenovatelů; domnívají se, že operací dělení se číslo nutně zmenšuje). Tyto problémy se asi nepodaří zcela odstranit, můžeme je však omezit cílenou prevencí – důrazem na pochopení zlomků ve všech jeho rolích a na zavedení operací s porozuměním.

Zlomky úzce souvisí s procenty. Žáci řeší tři typy úloh na procenta (zjišťují počet procent, procentovou část nebo základ). Procenta patří mezi témata školské matematiky, která mají důležité praktické aplikace a všichni žáci se s nimi budou v budoucnu setkávat. Proto je důležité, abychom při výuce dávali důraz na jejich důkladné porozumění, tedy aby byli žáci vedeni k rozboru praktických situací a spíše k výpočtu „přes jedno procento“ než k mechanickému počítání např. pomocí trojčlenky či dokonce pomocí tří „vzorců“.

Žáci se na 2. stupni seznamují s některými iracionálními čísly, konkrétně při probírání odmocnin a čísla π. Měli by mít představu o tom, jak vypadá desetinný rozvoj racionálních a iracionálních čísel. Je to dobrá příležitost k využití kalkulačky a diskusi o vhodnosti zaokrouhlování a možných důsledcích

[8] viz (Koman, M., Tichá, M., Kuřina, F., Černek, P.: *Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 2003)

[9] viz (Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., Šimša, J. *Matematika. Racionální čísla. Procenta.* Praha: Prometheus, 1994)

zaokrouhlování (zaokrouhlovací chyba). K iracionálním číslům bychom však měli přistupovat i z hlediska geometrického. Tedy konstruovat je pomocí pravoúhlých trojúhelníků, obdélníků apod. a umisťovat je pomocí grafického přenosu úsečky na číselnou osu.

Závěrem části věnované číslům je třeba uvést, že dobré porozumění racionálním číslům a záporným číslům je důležitým předpokladem pro zvládnutí početních úkonů, ale současně provádění těchto úkonů podporuje porozumění těmto číslům. U operací v rámci uvedených číselných oborů nestačí na jednom příkladu ukázat, jak fungují, ale i po vyvození příslušných algoritmů by se učitelé měli vracet na úroveň modelů, aby k propojování představy a algoritmů docházelo opakovaně. Mechanické nacvičování algoritmů je účinné spíše krátkodobě a selhává v okamžiku, kdy je pravidel k pamatování příliš.

U problematiky *proměnné* a *algebraických výrazů* je základem pochopení proměnné, jejíž hodnota se mění, a neznámé, která nabývá konkrétní hodnoty, případně hodnot. Písmenko v roli neznámé se do hry dostává v izolovaných případech už na 1. stupni, těžiště výuky proměnné je však na 2. stupni.

Problematika proměnné a algebraických výrazů spočívá na třech pilířích. Tím prvním jsou číselné výrazy a jejich aritmetika. Někdy se o algebře říká, že je to zobecněná aritmetika. To však není úplně přesné, protože algebraické procesy se v mnoha ohledech od aritmetických liší. Při úpravě číselných výrazů stačí použít znalost přednosti operací, což u algebraických výrazů nestačí. Například u číselného výrazu 2(3 + 5) žák nejprve sečte čísla v závorce a pak proveden násobení. U výrazu 2(x + 5) může jen násobit. Zatímco v aritmetice je znaménko plus výzvou k činnosti (sčítej), v algebře žák často tuto výzvu provést nemůže a musí nechat výraz tak, jak je (výraz 2x + 10 nelze už upravit, pokud nedosadíme nějaké číslo). Úpravy algebraických výrazů patří mezi nejobtížnější a pro žáky nejabstraktnější oblasti matematiky. Odkazy na úpravy číselných výrazů mohou žákům tuto oblast více přiblížit.

Druhým pilířem algebry je geometrie, resp. korespondence mezi obrazci a vzorci pro obsah, obvod apod. Žáci jsou zvyklí pracovat např. se vzorcem pro obsah obdélníka ve tvaru $S = a \cdot b$ a měli by z geometrie vědět, že proměnné a a b nabývají různých hodnot. V geometrii lze však účinně reprezentovat i některé algebraické výrazy či vzorce (např. druhá mocnina dvojčlenu). Tím můžeme přispět k jejich lepšímu pochopení.

Třetím pilířem algebry jsou úlohy na zobecňování. Tím myslíme úlohy, v nichž je dáno několik prvních členů číselné řady a žáci mají nejprve najít další členy a nakonec obecné vyjádření libovolného členu. Důležité je, že při řešení těchto úloh se písmeno v roli proměnné dostává do hry zcela přirozeně. Žák si uvědomuje nutnost symbolického zápisu (aby nemusel vypisovat mnoho různých případů) i jeho podstatu (výraz zastupuje různé případy, třeba i nekonečně mnoho). Učitel by měl žáky nechat dospět k symbolickému zápisu až poté, co si žák vyzkouší dostatečný počet konkrétních případů. Mezistupněm k symbolickému zápisu je slovní popis pravidla, případně rekurentní pravidlo (tedy popis, jak se dostaneme z (n – 1)ho členu do n-tého).

Základem algebraického uvažování je pochopení korespondence mezi určitou slovně vyjádřenou situací a jejím popisem pomocí písmen. Žáci by měli řešit dostatečný počet úloh, v nichž mají zapisovat slovní výroky symboly. Můžou však také řešit inverzní úlohu, tedy k danému výrazu vytvořit situaci (např. Jaká situace je popsána vztahem $y = 10\ x + 5$?). Teprve pak bychom měli přistoupit k úpravám algebraických výrazů, ty představují pro žáky základní školy nejvyšší úroveň abstrakce. Předčasná formalizace, tedy rychlý přechod k úpravám bez sémantického ukotvení výrazů, je zdrojem problémů.

Obtížné je také pro žáky nejednoznačné použití písmene v matematice. Písmeno označuje nejen proměnnou, ale také jednotku. Např. v aritmetice písmeno m reprezentuje metr, ale v algebře proměnná m označuje např. počet metrů. Dalším zdrojem problémů je používání písmena jako předmětu (např. d jako děti, u jako učitelé). To může být výhodné pro počáteční představu (např. při zápisu slovních úloh), ale může působit problémy později. Např. učitelé často vysvětlují žákům, že máme-li b jako banány a j jako jablka, pak při výpočtu $j + b + j + j + b$ nemůžeme sčítat banány a jablka a výsledek je $3j+2b$ (žáci mají na základě výše zmíněných zkušeností s operacemi s přirozenými čísly tendenci výraz nějak „ukončit“ a dospějí často k výsledku $5jb$). To však může vést k představě, že $3b$ jsou 3 banány (písmeno je v roli jednotky), ne třikrát neznámý počet banánů. Proto je nutné při použití této metafory zdůrazňovat i slovně, že se jedná o neznámý počet objektů ne o objekt sám.

Podstatou práce s algebraickými výrazy je použití ekvivalentních úprav. To si však žáci často neuvědomují. Je dobré jim tuto skutečnost zdůrazňovat a po provedení úprav se zeptat, zda platí, že pokud dosadí do původního výrazu nějaké číslo, dostanou po dosazení do konečného výrazu stejné číslo nebo mohou dostat nějaké jiné.

Součástí algebry je řešení lineárních rovnic. Propedeutikou této oblasti jsou úlohy typu „Myslím si číslo“, ale také jednoduché lineární rovnice (zapsané nejdříve pomocí čísel a např. prázdného obdélníku či otazníku např. 2 + ? = 5, posléze i písmena *x*). Ty se na úrovni 1. stupně řeší metodou pokus omyl, později také systematickým experimentováním, při němž se výsledky průběžně zapisují do tabulky.

Důležitý model pro zavedení ekvivalentních úprav rovnic představují váhy. Umožňují žákům „vidět“ důsledek úprav; vedou k porozumění, že rovnost se nemění, pokud na obou stranách vah dojde ke stejné změně, a že řešit rovnici znamená uskutečnit několik změn, které vedou k rovnosti neznámé zpravidla na levé straně a známé (počet, číslo) na pravé straně. Váhy mohou také narušit nesprávnou představu, kterou si žáci často vytvoří na základě svých předchozích zkušeností, a sice že znaménko „rovná se“ odděluje proceduru (výpočet) nalevo od odpovědi napravo, tedy že vlastně nejde o ekvivalenci.

Za použití modelu vah žák řeší rovnici nejdříve manipulací, kterou provází slovy, a postupně přidává aritmetický zápis.[10] Dostává se tak až k provádění operací na abstraktní úrovni. Teprve když dojde k osamostatnění symbolického zápisu, můžeme v úpravách použít i záporná čísla či zlomky, protože tyto úpravy se modelují obtížně.

Někdy se vyučuje „pravidlo“: převedu číslo na pravou stranu rovnice a změním znaménko. To však nemá matematickou oporu. Jedná se spíše o vizuální důsledek ekvivalentní úpravy: k oběma stranám rovnice přičtu/odečtu stejné číslo, případně výraz. To se následně projeví tak, že to vypadá, že se číslo „přesune“ na druhou stranu s opačným znaménkem. Žáci jsou sice nadšeni jednoduchostí pravidla, ale často ho pak nesprávně zobecní a mění znaménko i tehdy, když násobí obě strany rovnice číslem. Proto by se učitelé měli tohoto zkratkovitého vyjádření vyvarovat a zápisem odečítaného či přičítaného čísla k oběma stranám rovnice (např. symbolem | –5) dát najevo, co se s rovnicí vlastně děje. Důležitou součástí řešení rovnice je i zkouška, při níž si žáci ověří, že získali správný výsledek, a zpětně si uvědomují, co vlastně výsledek splňuje.

Očekávané výstupy tematického okruhu *Číslo a proměnná* jsou pro 2. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematiky a její aplikace do těchto konkrétnějších indikátorů (nastavených na minimální úroveň):

Očekávaný výstup	M-9-1-01 Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu
Indikátory	1. žák provádí základní početní operace se zlomky a desetinnými čísly 2. žák dodržuje pravidla pro pořadí početních operací v oboru celých a racionálních čísel, využívá vlastnosti operací sčítání a násobení (komutativnost, asociativnost, distributivnost) při úpravě výrazů 3. žák vyznačí na číselné ose racionální číslo a číslo k němu opačné 4. žák zná zpaměti druhé mocniny celých čísel od 1 do 10 a využívá je při výpočtech (i ke stanovení odpovídajících druhých odmocnin) 5. žák určí rozvinutý zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě

[10] K tomu účelu je možné použít applety, např. ten na adrese http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_3_t_2.html, protože současně s úpravou na vahách se objeví symbolický zápis této úpravy.

	6. žák provádí základní úpravy zlomků (rozšiřuje a krátí zlomek, vyjádří zlomek v základním tvaru, převádí zlomek na smíšené číslo a naopak) 7. žák určí absolutní hodnotu celého čísla
Očekávaný výstup	M-9-1-02 Žák zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor
Indikátory	1. žák zaokrouhluje čísla s danou přesností 2. žák využívá pro kontrolu výsledku odhad 3. žák účelně a efektivně využívá kalkulátor
Očekávaný výstup	M-9-1-03 Žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel
Indikátory	1. žák rozlišuje pojmy prvočíslo a číslo složené; společný dělitel a společný násobek 2. žák využívá kritéria dělitelnosti (2, 3, 5, 10) 3. žák rozloží dvojciferné číslo na součin prvočísel
Očekávaný výstup	M-9-1-04 Žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)
Indikátory	1. žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část: přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem
Očekávaný výstup	M-9-1-05 Žák řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů
Indikátory	1. žák využívá daný poměr v reálných situacích 2. žák stanoví poměr ze zadaných údajů 3. žák využívá měřítko mapy nebo plánu k výpočtu
Očekávaný výstup	M-9-1-06 Žák řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)
Indikátory	1. žák určí počet procent, je-li dána procentová část a základ 2. žák určí procentovou část, je-li dán procentový počet a základ 3. žák určí základ, je-li dán procentový počet a procentová část
Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním
Indikátory	1. žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných 2. žák využívá při úpravě výrazů vytýkání a vzorce $(a + b)^2$, $(a – b)^2$, $a^2 – b^2$ 3. žák vybere odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci
Očekávaný výstup	M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav
Indikátory	1. žák vyřeší rovnici a soustavu dvou jednoduchých lineárních rovnic pomocí ekvivalentních úprav 2. žák ověří správnost řešení slovní úlohy
Očekávaný výstup	M-9-1-09 Žák analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel
Indikátory	1. žák řeší jednoduché úlohy v oboru celých čísel 2. žák popíše konkrétní situace s využitím racionálních čísel

Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Číslo a proměnná*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

A)
1) Z číslic 2, 3, 4 vytvoř všechna trojciferná čísla dělitelná dvěma. Číslice se v jednom čísle nesmějí opakovat.
2) Pro které číslice *X* je číslo 3 15*X* dělitelné číslem 4?

B)
1) V zápise 3 4*5 nahraď hvězdičku číslicí tak, aby vzniklo číslo dělitelné třemi. Najdi všechna řešení.
2) Z číslic 1, 2, 8 vytvoř všechna trojciferná čísla dělitelná čtyřmi. Číslice se v jednom čísle nesmějí opakovat.

C)
1) Kterou číslici můžeš v čísle 5 342 škrtnout, abys dostal trojciferné číslo dělitelné šesti? Najdi všechna řešení.
2) V zápise 7 1*5 nahraď hvězdičku číslicí tak, aby vzniklo číslo dělitelné patnácti. Najdi všechna řešení.
3) Najdi všechna čísla ABA, která jsou dělitelná číslem 15. Číslice A a B jsou různé.

Možná řešení s metodickým komentářem

Úlohy jsou gradované podle obtížnosti. Při řešení úloh úrovně A je třeba použít pouze kritéria dělitelnosti dvěma a čtyřmi, pro úroveň B ještě kritéria dělitelnosti třemi a čtyřmi. Úroveň C kombinuje dvě kritéria, maximálně dvě kritéria využívá i algebrogram C3.

Řešení:
A)
1) 342, 432, 234, 324
2) 2, 6

B)
1) 0, 3, 6, 9
2) 128, 812

C)
1) 5; 2
2) 2, 5, 8
3) 525 a 585

Očekávaný výstup	M-9-1-03 Žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel

Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Součet dvou čísel je 2. Najdi tato dvě čísla, pokud:
a) Jedno číslo je o polovinu větší než druhé.
b) Jedno číslo je větší o polovinu hodnoty druhého čísla.
c) Jedno číslo je větší o 50 % hodnoty druhého čísla.

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení: a) 0,75 a 1,25; b) a c) výsledkem jsou čísla 0,8 a 1,2.

Žáci si musí uvědomit, že mezi procenty a zlomky existuje úzký vztah, který však nelze použít vždycky. Procenta můžeme nahradit zlomky, jen pokud je zlomek ve funkci operátoru (tedy v tomto případě, když počítáme 1/2 z něčeho). V úloze a) je zlomek 1/2 v roli čísla (které můžeme umístit na číselnou osu).

Očekávané výstupy	M-9-1-01 Žák provádí základní početní operace se zlomky a desetinnými čísly M-9-1-04 Žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)

Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Petr si jde koupit nový MP3 přehrávač. Mají ho ve dvou obchodech. Obchod Elektro má na výloze napsáno, že na všechno je sleva 20 %. Obchod Elektronika se chlubí slevou 40 % na všechno zboží. Petr má jasno. Už ví, kam si pro přehrávač půjde. Jak by ses rozhodl ty?

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha je vhodná pro diskusi s žáky. Někteří žáci se často řídí jen velikostí slevy, což však v tomto případě nemá smysl, protože neznáme původní cenu, z jaké je sleva vypočítána. Správná reakce žáků by měla být, že bez znalosti původní ceny nelze s jistotou rozhodnout, kam jít nakoupit.

Úloha se dá rozšířit. Můžeme se žáků zeptat, kdy by se vyplatilo jít do Elektra (např. kdyby v Elektru stál přehrávač původně 2 000 Kč a v Elektronice by stál původně 3 000 Kč) a kdy by se vyplatilo jít do obchodu Elektronika (např. kdyby v Elektru stál původně 2 500 Kč a v Elektronice by stál původně 3 000 Kč). Pro žáky jsou takové úvahy zpravidla motivační, a jsou tak přirozeně vedeni k řešení úloh s procenty.

Očekávaný výstup	M-9-1-06 Žák řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)

Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Představ si, že nemáš k dispozici kalkulačku. Zpaměti zjisti, jaký je nejlepší odhad pro hodnotu čísla $\frac{4{,}95 \cdot 11{,}18}{9{,}98}$.

Vyber jednu z následujících možností:

a) $\frac{4 \cdot 11}{10}$, b) $\frac{4 \cdot 11}{9}$, c) $\frac{5 \cdot 11}{10}$, d) $\frac{5 \cdot 11}{9}$

Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci musí použít svou schopnost odhadu velikosti součinu a podílu čísel, přičemž čísla nejdříve zaokrouhlují. Svůj odhad si mohou zkontrolovat na kalkulačce.
Správná odpověď je c).
Poznámka: Úloha byla inspirována úlohou z TIMSS 2011.

Očekávaný výstup	M-9-1-02 Žák zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor

Ilustrativní úloha 5	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Načrtni si číselnou osu a vyznač na ní čísla 0, 1 a 2. Mezi čísly 0 a 1 vyznač dva zlomky, které označ *A* a *B* (*A* < *B*). Když tyto dva zlomky vynásobíš, dostaneš číslo *C*. Kde přibližně se na číselné ose nachází číslo *C*?

Možná řešení s metodickým komentářem

Číslo *C* musí být mezi 0 a *A*. Žáci si musí uvědomit, že když vynásobíme dva zlomky menší než 1, dostaneme číslo menší, než jsou oba původní činitelé.
Pokud mají žáci s úlohou problémy, lze ji zadat i pomocí konkrétních zlomků. Můžeme žáky požádat, aby hodnoty zlomků sami navrhovali. Žáci pak vyznačují konkrétní hodnoty součinů na číselné ose a hledají zobecnění.

Žákům 7. až 9. ročníku byla zadána úloha, v níž měli bez výpočtu odhadnout výsledek součinu zlomků $\frac{7}{9}$ a $\frac{6}{12}$. Třetina z 21 žáků se domnívala, že výsledek bude někde mezi oběma danými čísly (což byla strategie, kterou používala řada z nich pro násobení libovolných zlomků), další 3 žáci umístili výsledek až za číslo 1 a jedna žákyně těsně před číslo 1. Zajímavé bylo, že byli i žáci, kteří sice přijali myšlenku, že číslo násobené zlomkem menším než 1 se zmenší, současně se však domnívali, že to neplatí pro číslo menší než 1 (jakoby se číslo menší než 1 už nemohlo zmenšit). Ukazuje to na malé pochopení podstaty operací se zlomky a velikosti jejich výsledku. Zdálo se, že řada žáků pracuje s číselnou osou v souvislosti se zlomky vůbec poprvé.
Poznámka: Podobná úloha byla zadána v TIMSS 2007 jako úloha s výběrem odpovědi a správně ji řešilo jen 23 % českých žáků 8. ročníku.

Očekávanývýstup	M-9-1-01 Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu

Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Budeme hledat, jakým způsobem můžeme zapsat číslo $\sqrt{2}$ jako desetinné nebo periodické číslo.
Víme, že platí nerovnosti $1 < \sqrt{2} < 2$, protože platí nerovnosti pro druhé mocniny těchto čísel
$1^2 = 1 < \sqrt{2}^2 < 2^2 = 4$.
Podobně platí $1{,}1 < \sqrt{2} < 1{,}8$, protože platí $1{,}1^2 = 1{,}21 < \sqrt{2}^2 < 1{,}8^2 = 3{,}24$.
Tak můžeme hledat čísla, která se postupně blíží k hodnotě čísla $\sqrt{2}$.
S pomocí kalkulačky najdi další taková čísla.

Možná řešení s metodickým komentářem

Cílem této aktivity je, aby si žáci uvědomili, že mohou najít další a další čísla, která se budou blížit k číslu $\sqrt{2}$ zleva i zprava, která však tuto odmocninu nemohou nahradit. Uvědomí si, že iracionální čísla lze nahradit číslem s desetinným zápisem jen s určitou přesností. Žáci pracují s kalkulačkou a číselnými nerovnostmi. Lépe porozumí také řádu čísel.

Některá možná řešení:
$1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}55$, protože $1{,}5625 < \sqrt{2}^2 < 2{,}4025$
$1{,}351 < \sqrt{2} < 1{,}511$, protože $1{,}825201 < \sqrt{2}^2 < 2{,}283121$
$1{,}385 < \sqrt{2} < 1{,}497$, protože $1{,}918225 < \sqrt{2}^2 < 2{,}241009$

Poznámka Úloha je převzata z Kubínová, M. *Klíč k matematice aneb Přijdu na to sám!* Praha: Albatros, (2005).	
Očekávané výstupy	M-9-1-01 Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu M-9-1-02 Žák zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor

Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Rozlož následující zlomky na součet dvou zlomků:

a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{5}{6}$, c) $\frac{10}{11}$

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešením jsou například následující rozklady:

a) $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ nebo $\frac{3}{4} == \frac{5}{12} + \frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$ nebo $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{10}{11} = \frac{9}{11} + \frac{1}{11}$ nebo $\frac{10}{11} = \frac{3}{22} + \frac{17}{22}$

Podobnou úlohu můžeme vytvořit i pro záporná čísla (např. „Vymysli úlohu, která obsahuje nejméně dvě záporná čísla a jejíž výsledek je –2.“). Případně můžeme měnit operace (žáci mají hledat rozdíl, součin, podíl). Obtížnější varianta úlohy může vyžadovat, aby žáci použili i závorky. Jedná se o inverzní úlohu, než kterou žáci zpravidla řeší (tedy sečíst, vynásobit čísla). Musí při ní prokázat, že rozumí příslušnému algoritmu, pracují s různými zlomky, odhadují jejich velikost. Úloha umožňuje individualizaci. Žáci, kteří problematiku už dobře ovládají, mohou vytvářet náročnější rozklady.

Očekávaný výstup	M-9-1-01 Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu

Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Načrtni, co by mohlo být v geometrii znázorněním výrazu 2*x*?

Možná řešení s metodickým komentářem

Možným řešením je úsečka o délce 2*x*, ale také obsah obdélníku o stranách 2 a *x*.
Druhá interpretace je pro žáky často nezvyklá, protože mají představu, že pro obsah by měla být proměnná ve druhé mocnině.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Ilustrativní úloha 9	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Časopis „Dům a design“ užívá bodový systém pro hodnocení nových kuchyní. Kuchyň s nejvyšším počtem bodů získává cenu „Kuchyň roku“. Porotci udělují body podle následujícího systému:

3 body: nadstandardní kuchyň

2 body: standardní kuchyň
1 bod: kuchyň pod standardem

Průměrná hodnocení pěti kuchyní od různých výrobců podle kritérií Funkčnost, Vzhled a Bezpečnost lze vyčíst z následující tabulky. Hodnota Energetická náročnost uvádí index energetické spotřeby (čímž větší energetická spotřeba, tím větší hodnota v tabulce).

Kuchyň	Funkčnost (*F*)	Vzhled (*V*)	Bezpečnost (*B*)	Energetická náročnost (U)
K1	2,8	2,0	2,2	1,0
K2	2,6	1,8	2,6	0,4
K3	2,0	2,2	2,8	1,8
K4	2,2	3	1,8	2,8
K5	2,8	?	2,0	1,2

a) Na výpočet celkového hodnocení kuchyní časopis používá následující vzorec:

$$\text{Celkové hodnocení} = 5 \cdot F + 0{,}8 \cdot B - 2{,}5 \cdot U + V$$

Vysvětli, proč je před písmenkem *U* ve vzorci minus.

b) Vypočti celkové hodnocení kuchyně K1.

c) Jaké ohodnocení by musela získat v kategorii Vzhled kuchyň K5, aby byla celkově lepší než kuchyň K1?

d) Výrobce kuchyně K4 nesouhlasí se způsobem, jak se určuje celkové hodnocení. Uprav vzorec tak, aby se jeho kuchyň stala „Kuchyní roku“.

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:

a) Protože energetická náročnost má negativní důsledky (náklady na energii při používání kuchyně rostou).

b) Kuchyň K1 má hodnocení 15,26 bodů.

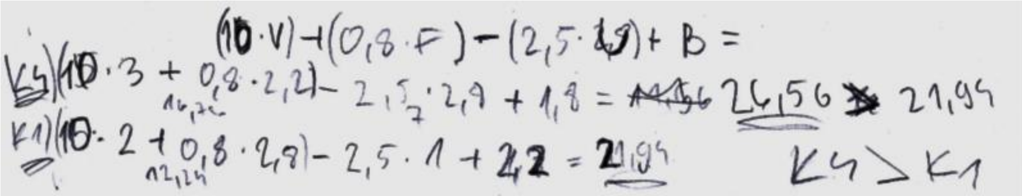
c) Kuchyň K5 by musela získat více než 2,66 bodů. Po dosazení hodnot do vzorce pro K5 dostaneme $5 \cdot 2{,}8 + 0{,}8 \cdot 2 - 2{,}5 \cdot 1{,}2 + V = 12{,}6 + V$, a tedy V musí být větší než $15{,}26 - 12{,}6 = 2{,}66$.

d) Jakékoli řešení, při kterém vyhraje kuchyň K4. Ve vzorci stačí posílit kritérium Vzhled, protože tam je kuchyň K4 nejlepší, a naopak potlačit kritérium Energetická náročnost, protože tam je nejhorší.

Úloha je inspirována úlohou z PISA 2003, v níž měli čeští žáci 9. ročníku špatné výsledky. Obtížná byla zejména poslední část úlohy, kdy mají žáci upravit již existující vzorec. S tím však nemají z výuky zkušenosti (úspěšných bylo jen cca 22 % žáků). Je nutné, aby si žáci uvědomili, zda mají hodnoty odečíst nebo přičíst, a to, jak mohou koeficienty ve vzorci ovlivnit celkový výsledek. Při úpravě vzorce si také procvičí dosazování do výrazu.

Žáci 8. a 9. ročníku, u nichž byla výše uvedená úlohu ověřována, měli problémy se čtením tabulky. Zpravidla jim pomohla výzva, aby vysvětlili některá čísla v tabulce. Ne všichni žáci chápali význam „energetické náročnosti“.

U výzvy k modifikaci vzorce se nejčastěji objevovaly návrhy na změnu znamének (zřejmě v souvislosti s řešením úlohy a)). Žáci např. navrhovali přičíst ohodnocení pro energetickou náročnost, což však znamenalo, že ztratili spojení s reálným kontextem a úlohu řešili čistě matematicky. Někteří žáci si pak sami uvědomili, že tím poruší vypovídací schopnost vzorce o kvalitě kuchyní, někteří si toho vědomi nebyli. Jako druhý většinou následoval návrh měnit hodnotu koeficientů ve vzorci. Někteří se spokojili s návrhem jedné modifikace, jiní si uvědomovali, že jejich řešení není jediné možné. Autentické žákovské řešení, v němž žák měnil všechny koeficienty kromě Energetické náročnosti a správně posílil koeficient u Vzhledu, je na obrázku.



Je zajímavé, že v případě, že žáci vůbec nevěděli, jak úlohu uchopit, stačilo zadat úlohu obráceně. Tedy nastolit nějakou jinou situaci (např. soutěž o nejlepší auto), nechat žáky vymyslet kritéria pro hodnocení (třeba jen dvě) a následně vytvořit i vyplněnou tabulku. Nakonec měli žáci navrhnout nějaký jednoduchý vzorec pro hodnocení. Žáci pak už zpravidla dokázali takto získané zkušenosti vztáhnout i na zadanou úlohu.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Ilustrativní úloha 10	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Vyber všechny odpovědi, které odpovídají situaci vyjádřené rovností $6x - 3y = 18$.

a) Každé dítě snědlo šest koláčů a každý dospělý tři koláče, dohromady snědli 18 koláčů.
b) Petr je nešika. Z každého balení po šesti vejcích jich na cestě polovinu rozbije. Nakonec donesl domů jen 18 vajec.
c) Každé z děvčat nazdobilo 6 vajíček a každý z chlapců, kteří přišli na koledu, od nich dostal tři nazdobená vajíčka. Pro další koledníky ještě zbylo osmnáct nazdobených vajíček.

Možná řešení s metodickým komentářem

Správné řešení je možnost c), přičemž *x* je počet děvčat a *y* je počet chlapců.
Možnost b) to být nemůže, protože obsahuje jen jednu veličinu (balení vajec) a algebraicky se dá popsat jako $x(6-3) = 18$, kde *x* je počet balení na začátku.
Situace a) sice obsahuje dvě veličiny, ale správný algebraický popis situace je $6x + 3y = 18$, kde *x* je počet dětí a *y* je počet dospělých.

Úloha je obtížná tím, že žáci nemají algebraický popis situace tvořit, ale naopak mají vymyslet popis situace, kterou rovnost vyjadřuje. Řada žáků 8. a 9. ročníku, kterým byla výše uvedená úloha předložena, se nechala zmást v možnosti a) slovem „snědl" (tedy mám odečíst). Toto slovo je v zadání úlohy v roli tzv. antisignálu, tedy slova, které odkazuje na jinou operaci, než jaká je nutná pro správné řešení úlohy. Některým žákům pomohla k odhalení chyby výzva, aby situaci v možnosti a) algebraicky zapsali sami. Přitom si chybu uvědomili. Některým žákům pomohlo i názorné zakreslení:

Cesta od situace k zapsání výrazu je pro žáky samozřejmě jednodušší než cesta opačná. Nicméně žáci by měli dostávat i úkoly, v nichž se má tvořit kontext k algebraickému výrazu, protože to přispívá k důkladnému pochopení významu algebraických výrazů.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Ilustrativní úloha 11	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Doplň místo teček znaménka operací. Můžeš použít závorky.
$6p \dots 7 \dots 2p = 8p + 7$
$6p \dots 7 \dots 2p = 12p^2 - 14p$

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
$6p + 7 + 2p = 8p + 7$
$(6p - 7) \cdot 2p = 12p^2 - 14p$

Úloha se řadí svým charakterem opět k úlohám inverzním – místo úpravy algebraického výrazu mají žáci výraz vytvořit. První část je jednodušší, i když žáci nemohou výraz číst mechanicky zleva doprava, ale musejí si uvědomit jeho strukturu a použít komutativní zákon.
U druhé úlohy je obtížné to, že se musejí použít závorky, s čímž mají žáci často problém. Problém je v tom, že když už si žáci nutnost závorek uvědomí, automaticky předpokládají, že prvním členem se bude závorka násobit (tedy uzávorkují členy 7 a $2p$). Lze se domnívat, že tento impuls je způsoben tím, že žáci se častěji setkají s výrazem ve tvaru $2p \cdot (6p - 7)$ než ve tvaru $(6p - 7) \cdot 2p$.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

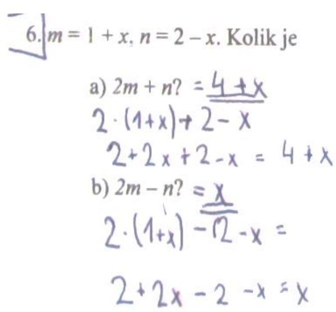
Ilustrativní úloha 12	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Jsou dány výrazy $m = 1 + x$ a $n = 2 - x$. Zjisti, kolik je
a) $2m + n$
b) $2m - n$.

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
a) $4 + x$, b) $3x$

Úloha je podobná jedné z úloh z výzkumu TIMSS 2007, kde s ní žáci 8. ročníku měli velké problémy. Je obtížná tím, že žáci musejí dosazovat do výrazu výraz (dvojčlen), přičemž v části b) je situace ztížena nutností výraz odečíst.



Úloha byla zadána žákům 8. a 9. ročníku. Největší a poměrně častý problém, který se u nich objevil, byl v tom, že žáci dvojčleny při dosazování do nových výrazů nedali do závorek. Po upozornění na chybu si většina chybujících žáků absenci závorek uvědomila. U některých se však projevil předpoklad, že závorky jsou nutné jen tehdy, když musíme dosazený výraz násobit nějakým konkrétním číslem (v našem případě výraz m násobíme číslem 2). Tak se stalo, že žáci u dosazení za n do druhého výrazu závorky nepoužili (viz chybné autentické žákovské řešení). Evidentně si neuvědomili, že se vlastně jedná o násobení číslem – 1 tedy o situaci analogickou dosazení za m.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Ilustrativní úloha 13	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

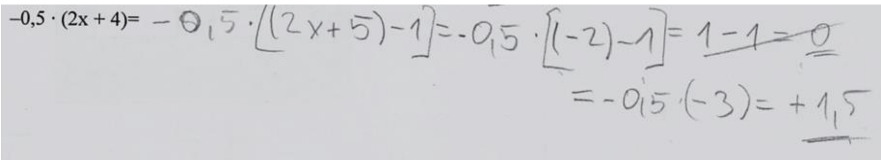
Platí $2x + 5 = -2$. Najdi hodnotu následujících výrazů:

a) $3(2x + 5) =$
b) $-1(2x + 5) - 1(2x + 5) =$
c) $2x + 6 =$
d) $2x + 4 =$
e) $-0{,}5(2x + 4) =$

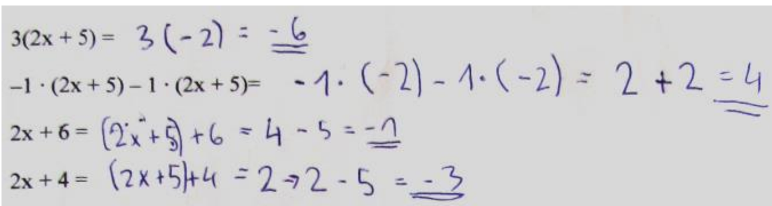
Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
a) –6, b) 4, c) –1, d) –3, e) 1,5.

Úlohu je možné řešit tak, že se ze zadané rovnosti vyjádří hodnota $x = -3{,}5$ a ta se dosadí do jednotlivých výrazů. Elegantnější řešení, které prozrazuje, že žák má do struktury výrazu vhled, spočívá v tom, že žáci budou pracovat s výrazem $2x + 5$ jako celkem a budou zadání přetvářet tak, aby bylo možno dosadit jen zadanou hodnotu -2. Např. v části c) je možné si výraz přepsat jako $(2x + 5) + 1 = -2 + 1 = -1$. Na tuto strategii je mají navést i dvě první úlohy, v nichž je výraz $2x + 5$ na první pohled vidět.
Při ověřování byly první dvě úlohy pro žáky 8. a 9. tříd poměrně snadné, jedinou závažnou chybou bylo nepoužití závorek. Někteří žáci se nechali po dosazení hodnoty zadaného výrazu u úlohy a) svést k výpočtu $3 - 2 = 1$ místo součinu $3 \cdot (-2) = -6$.
Někteří z žáků, kteří řešili úlohu druhou strategií, sice provedli u úlohy c) úvahu „je to o jednu více než výraz v zadání“, ale nesprávně provedli přičtení čísla 1 k číslu -2 a došli k číslu -3. Ke stejnému výsledku došli i žáci, kteří porušili rovnost, protože připsali číslo -1 za výraz $2x + 6$.
Z autentického žákovského řešení části e) je zřejmé, že se žák nejprve dopustil chyby při roznásobení závorky u druhého členu. Zajímavé je, že ho vůbec napadlo, že může použít distributivní zákon, a nezačal automaticky nejdříve upravovat závorku. To byl jeho druhý a tentokrát úspěšný způsob řešení.


$-0{,}5 \cdot (2x + 4) = -0{,}5 \cdot [(2x+5)-1] = -0{,}5 \cdot [(-2)-1] = \cancel{1-1=0}$
$= -0{,}5 \cdot (-3) = +1{,}5$

Další žákovské řešení se týká části c). Žák k danému výrazu přičetl číslo 5, dosadil za výraz $2x + 5$, provedl příslušné dosazení a operaci a číslo 5 opět odečetl. Stejně tak řešil i část d). Princip řešení je správný, i když zápis správný není, neboť je porušena rovnost výrazů.


$3(2x + 5) = 3(-2) = -6$
$-1 \cdot (2x + 5) - 1 \cdot (2x + 5) = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 2 + 2 = 4$
$2x + 6 = (2x + 5) + 6 = 4 - 5 = -1$
$2x + 4 = (2x + 5) + 4 = 2 \rightarrow 2 - 5 = -3$

Očekávané výstupy	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

Ilustrativní úloha 14	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Zjednoduš $x(x+1)-(x+1)=$

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
x^2-1

Úloha je jednoduchá. Problémy mohou být jen při odstraňování druhé závorky. Úloha však může také diagnostikovat, zda žáci uvažují o struktuře výrazu. Dá se totiž řešit vytknutím výrazu $(x+1)$, čímž dostaneme výraz $(x+1)(x-1)$, což je podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin rovno x^2-1. Tento způsob řešení však žáci většinou nevolí.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Ilustrativní úloha 15	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Víme, že *n* je reálné číslo. Co je víc, 3*n,* nebo *n*+6?

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
Rovnost nastane pro číslo 3, první výraz je větší než druhý pro čísla větší než 3.

Při řešení úlohy žák musí prokázat, že rozumí podstatě proměnné jako označení libovolného čísla v daném oboru. Žáci však často odpovídají nesprávně. Někdo říká, že větší je 3*n*, protože se tam jedná o součin. Jiný považuje za větší druhý výraz kvůli přítomnosti čísla 6, které je větší než 3 v prvním výrazu. Tyto odpovědi přirozeně vedou učitele k výzvě, aby žáci zjistili, za jakých okolností je větší první výraz, kdy nastane rovnost a kdy je větší druhý výraz.

Očekávaný výstup	M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

Ilustrativní úloha 16	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Urči, která ekvivalentní úprava byla použita při úpravě rovnice $4x-16=12$. K ekvivalentní úpravě z levého sloupce přiřaď výsledný tvar rovnice z pravého sloupce.

1. Obě strany rovnice byly vyděleny číslem 4.	a) $-16=12+4x$
2. Obě strany rovnice byly vynásobeny číslem –1.	b) $-16=12-4x$
3. Od obou stran rovnice byl odečten výraz 4*x*.	c) $4x=28$
4. K oběma stranám rovnice bylo přičteno číslo 16.	d) $x-4=3$
	e) $-4x+16=-12$

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
1d, 2e, 3b, 4c

Žáci nemají řešit lineární rovnici (pro mnohé to znamená aplikovat algoritmus, který třeba ani nemusejí chápat), ale mají uvažovat nad podstatou ekvivalentních úprav.

Očekávaný výstup	M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

Ilustrativní úloha 17	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

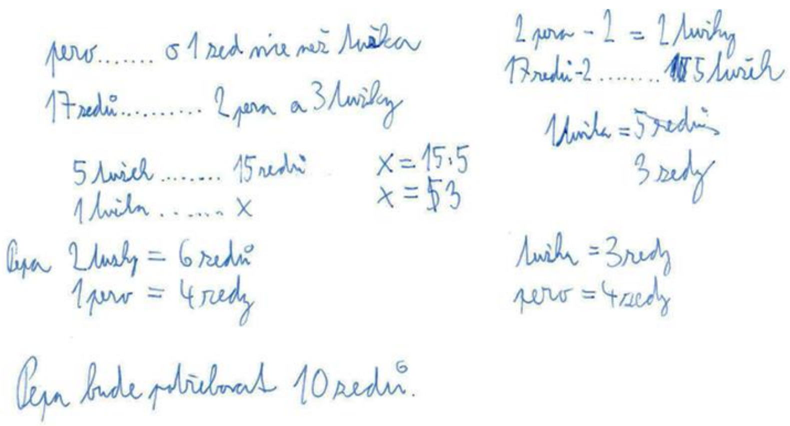
Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napiš postup výpočtu.

Možná řešení s metodickým komentářem

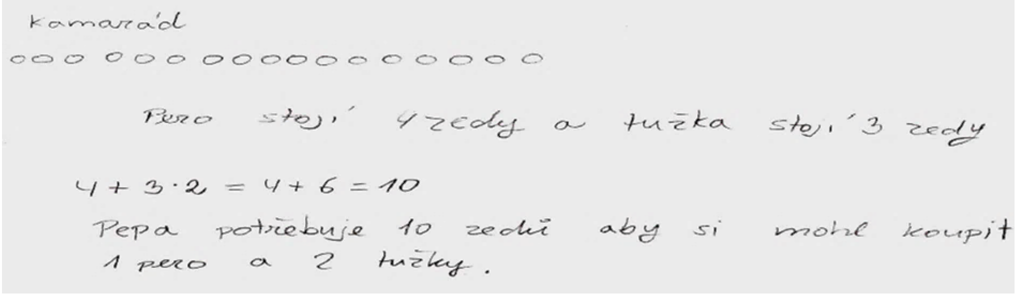
Řešení:
$t = 3$, $p = 4$
Pepa bude potřebovat 10 zedů.

Úloha pochází ze šetření TIMSS, kde ji řešilo správně jen necelých 25 % žáků 8. ročníku. Úlohu lze řešit aritmeticky a využít metody pokus-omyl (či lépe systematického experimentování) nebo algebraicky, tedy pomocí soustavy rovnic. Pokud je t cena tužky, p cena pera, pak dostaneme soustavu rovnic $p = t + 1$ a $2p + 3t = 17$.

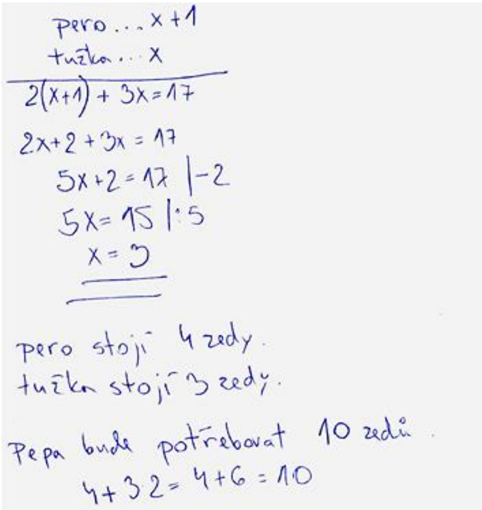
Většina žáků při ověřování úlohy sestavila rovnice zmíněné výše. Autentické žákovské řešení ukazuje zajímavý způsob řešení bez rovnic. Žák od ceny za 2 pera a 3 tužky odečetl 2, neboť 2 pera přispívají do částky 17 zedů dvěma zedy navíc, než by do ní přispěly 2 tužky. Výsledný rozdíl v hodnotě 15 zedů pak správně dělil 5 a získal cenu tužky.



V následujícím řešení žákyně využívá metodu pokus omyl. Tipla si cenu pro tužku a pero a následně ověřila správnost svého řešení – nejdříve pomocí obrázku, pak i výpočtem.



Řešení pomocí rovnice je na dalším obrázku.

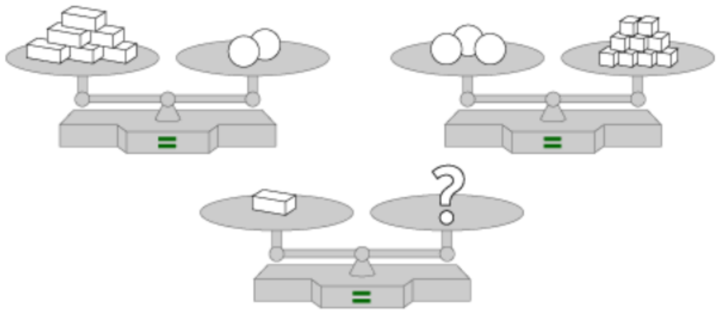


Žáci se nejčastěji dopouštěli chyb z nepozornosti. Např. zaměnili tužky a pera a vytvořili rovnici pro 2 tužky a 3 pera. Velmi častou chybou bylo sestavení první rovnice pro jednu tužku a jedno pero. Často se objevil problém v symbolickém popisu ceny za dvě pera jako $2x + 1$ namísto $2(x + 1)$. Zřejmě nešlo o nepochopení podstaty situace, ale o neadekvátní symbolický zápis bez závorky.

Očekávaný výstup	M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

Ilustrativní úloha 18	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Aniž bys sestavoval rovnice, zjisti, jaké těleso (nebo tělesa) musíš dát místo otazníku, aby nebyla porušena rovnováha.



Zdroj http://www.learner.org/courses/learningmath/algebra/session6/part_a/balance.html

Možná řešení s metodickým komentářem

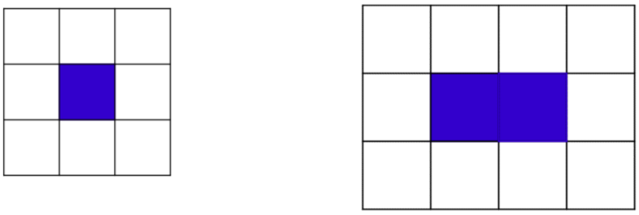
Řešení:
Místo otazníku patří jedna krychle. Stačí si uvědomit, že jedné kouli odpovídají tři krychle (což lze odvodit z obrázku druhé váhy), tedy po dosazení do rovnosti na prvních vahách dostaneme, že šest kvádrů odpovídá šesti krychlím. Tedy jednomu kvádru odpovídá jedna krychle.

Podstatou úlohy je, že žáci vlastně provádějí substituci – nahrazování objektů jinými objekty, aniž by prováděli úpravy v symbolické rovině. Úlohy tohoto typu jsou vhodné jako vstupní úlohy, když se žáci začínají učit řešit rovnice, případně i později, když chceme, aby úpravy správně pochopili. Model vah je důležitý pro pochopení principu rovnosti obou stran rovnice.

Očekávaný výstup	M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

Ilustrativní úloha 19	Obtížnost	minimální	A) optimální	B) excelentní

Na obrázku jsou jezírka o různé velikosti. Modrá část představuje jezírko, bílá část dlažbu.



Jezírko o velikosti jedna (jeden modrý čtverec) vyžaduje 8 dlažebních kamenů. Na jezírko o velikosti dva je třeba 10 dlažebních kamenů. Šířku jezírka ponecháme vždy jen na šířku jednoho dlažebního kamene.
A) Urči počet dlažebních kamenů pro jezírko velikosti 3, 5, 10, 100…
B) Urči počet dlažebních kamenů pro libovolně velké jezírko.

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:

Velikost jezírka	Počet dlažebních kamenů
1	8
2	10
3	12
4	14
5	16
10	26
100	206
…	…
n	$2n + 6$

Jedná se o úlohu na zobecňování. Ty jsou zpravidla formulované tak, že nejprve je vyloženo pravidlo, pomocí kterého vznikají členy nějaké „řady čísel“. Pak je položena otázka na několik následujících členů, dále na nějaký vzdálený člen (kde už nelze situaci modelovat obrázkem nebo jednoduše dopočítat a žák musí hledat pravidlo). Nakonec je vyžadováno obecné pravidlo pomocí symbolického zápisu. Jedná se tedy o úlohy, v nichž se přirozeně objevuje proměnná – žák si uvědomuje její smysl jako zástupného symbolu mnoha čísel.
Mezistupněm na cestě k popisu pomocí symbolů je, když si žák uvědomí, že každý další řádek tabulky lze vyplnit tak, že přičteme číslo 2 k předchozímu počtu kamenů (každá velikost jezírka vyžaduje o 2 dlažební kostky víc než předchozí). Pak žáci mohou pravidlo vyslovit slovy. Např. „Vždy potřebujeme 6 krajních dlažebních kamenů ($2 \cdot 3$) a mění se pouze vnitřní kameny zakreslené na

náčrtku podél horní a dolní strany, přičemž při každém následujícím zvětšení se přidají dva.“ Odtud je už jen krůček k zobecnění. U úlohy je dále důležité, že žáci mohou k zobecnění dojít buď přímo z dané situace nebo z tabulky. Úloha byla s úspěchem použita i u žáků 5. a 6. ročníku. Žáci přišli s dvěma pravidly: $8 + 2(n - 1)$ a $6 + 2\underline{n}$. Protože ještě neuměli zjistit, že je to totéž, protože výrazy ještě upravovat neuměli, přesvědčili se o správnosti jen na úrovni dosazení konkrétních velkých čísel. Poznámka: Úloha je převzata z Littler, G., Benson, D. Pravidelnosti vedoucí k algebře. In *Náměty na podnětné vyučování matematice* (197–256). Praha: PedF UK v Praze, (2007).

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

3. Tematický okruh Závislosti, vztahy a práce s daty

Helena Binterová, Marta Vrtišová, Eva Zelendová

RVP ZV: *V tematickém okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.*

Poznávání určitého typu změn a závislostí je jednou ze základních a často používaných matematických dovedností. Od nepaměti lidé pozorovali kvantitativní závislosti určitých jevů. Všímali si například toho, že čím je oheň větší, tím více pociťují tepla, a čím dále od plamene jsou, tím méně tepla cítí. Vnímali skutečnost, že čím rychleji běží běžec, tím kratší dobu běží do cíle. Pozorovali změnu délky dne během roku v závislosti na ročním období apod. Pozorované údaje o daných jevech začali zapisovat a využívat k plánování vlastních činností, k hledání zákonitostí či k předpovídání přírodních jevů. V běžném životě mohou i děti sledovat, jak se mění jedna veličina v závislosti na druhé, a na základě životních zkušeností si tvořit představu kvantitativních vazeb kauzálních jevů.

Se závislostmi a vztahy se děti setkávají již v předškolním období. V této době se začíná postupně (nevědomě) formovat funkční myšlení. Děti v této oblasti získávají první zkušenosti, které souvisejí s **přiřazováním** (rovnání kostek do krabic, triček do skříní, talířů do přihrádek apod.), s **rozdělováním** věcí (např. ovoce kamarádům), s normami v jednání a chování (při setkání s jinou osobou pozdravím, za poskytnutou pomoc poděkuji apod.) a s prováděním činností **v daném pořadí** (Křižovatku přecházím až poté, co se rozhlédnu. Auta se rozjedou až poté, co na semaforu svítí zelená).

Ve výuce matematiky na základní škole jsou obsaženy významné propedeutické prvky ve vztahu k pojmům závislostí a vztahů, k pochopení funkčního myšlení a pojmu funkce. Žáci získávají nové zkušenosti s přiřazováním (např. při počítání „po jedné“ nebo při práci s tabulkami). Pracují s úlohami, které vedou ke sledování závislostí (např. součtu na velikosti sčítanců či součinu na velikosti činitelů, přímé a nepřímé úměrnosti veličin). V geometrii zkoumají závislosti obvodů a obsahů geometrických útvarů na velikostech stran nebo objemů těles na velikosti hran. Při řešení konstrukčních úloh žáci sledují, jak se mění výsledek úlohy se změnami zadaných údajů. Je třeba si uvědomit, že formování funkčního myšlení je dlouhodobý proces. Pochopení funkční závislosti však umožňuje žákům obecně pochopit souvislosti či podmíněnost změn.

Společné znaky v prvním i druhém období vzdělávání na základní škole:

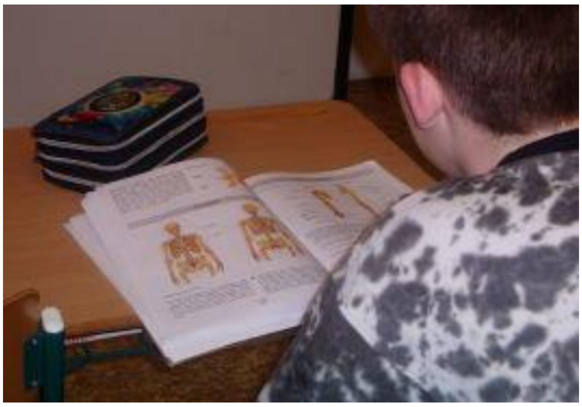
- Žáci pracují s tabulkami, diagramy a grafy: doplňují číselné tabulky podle zadaných údajů, sestavují tabulky dat na základě přečteného textu, pomocí tabulek sestrojují diagramy a grafy. Žáci se orientují v grafickém zpracování dat a vyhledávají informace v jízdních řádech. Všechny tyto aktivity velmi účinně přispívají k zavedení a pochopení pojmu **funkční závislost**.
- Žáci získávají zkušeností s přiřazováním. Tyto zkušenosti vedou k vytvoření intuitivní představy funkce jako závislosti dvou (nebo více) proměnných, kterou lze zapsat pomocí přiřazení, které každému prvku z jisté množiny přiřadí právě jedno reálné číslo. V tomto kontextu je však někdy málo zdůrazňována jednoznačnost tohoto přiřazení závisle proměnné. Jestliže je pozornost věnována spíše vyplňování tabulky, zápisu funkce nebo technice rýsování grafu, mohou se u žáků vytvářet o pojmu funkce chybné představy.
- Do výuky i pro žákovskou práci doma je vhodné zařadit i tzv. badatelské aktivity (jednoduchá statistická šetření). Žáci mohou zjišťovat kolikrát padne na hrací kostce šestka z celkového počtu třiceti hodů, kolik sourozenců mají žáci dané třídy, jaké je rozložení známek v písemné práci z matematiky, jak závisí číslo bot na délce chodidla apod. Při statistickém šetření žáky vedeme

k využití tzv. čárkovací metody (čtyři čárky se pátou čárkou přeškrtnou, např. ~~||||~~ ~~||||~~ // znamená 5+5+2=12).

- Na různých úrovních obtížnosti žáci hledají v reprezentacích dat největší a nejmenší prvek, objevují vlastnosti „roste“, „klesá“, „nemění se“. V průběhu základního vzdělávání se žáci seznamují s konkrétními příklady funkční závislosti.
- Je třeba upozornit na fakt, že v tematickém okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* učitelé málo využívají konkrétní příklady z praxe. Žáci se jen zřídka setkají s funkcemi, kde nelze stanovit funkční předpis nebo s tabulkami, kde u dat nenaleznou žádnou zřejmou závislost apod. Tato skutečnost vede k tomu, že žáci mají mnohdy velice formální představy a izolované poznatky o zavedených pojmech.
- Žáci s oblibou využívají pro zpracování dat a kreslení grafů výpočetní techniku (kalkulátory, programy GeoGebra, WxMaxima, MSExcel, Wolfram Alpha apod.) a další pomůcky pro modelování různých závislostí. To umožňuje lepší pochopení dané problematiky i žákům, kteří mají nedostatky v numerickém počítání nebo ve zvládnutí rýsovacích technik.
- Závislosti, vztahy a práce s daty jsou také součástí mezinárodních šetření TIMSS a PISA.

Při utváření pojmů z tematického okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* si žáci musí nejprve utvořit na základě zkušeností představu kvantitativních vazeb a kauzálních jevů. Potom začínají využívat těchto zkušeností při řešení některých problémů a teprve poté mohou systematicky pracovat s pojmem funkce. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací. Příkladem dobré praxe může být projekt *Anatomie v matematice*[11], který ukazuje možnosti využití výpočetní techniky v hodinách matematiky s přesahem do vzdělávací oblasti Člověk a příroda. Anatomická měření a jejich statistické a matematické zpracování se uskutečnilo v rozsahu pěti hodin. Do hodin matematiky byl projekt zařazen jako motivace pro učivo o úměrnostech.



[11] Realizoval Peter Krupka, Brno (viz http://clanky.rvp.cz/clanek/k/projekt/2517/ANATOMIE-V-MATEMATICE.html/)

První stupeň ZŠ

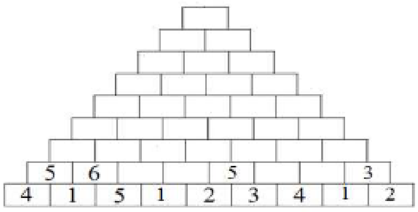
Pro **1. období 1. stupně** ZŠ uvádí RVP ZV tři závazné očekávané výstupy.
Žák

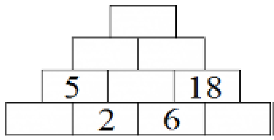
- M-3-2-01 orientuje se v čase, provádí jednoduché převody jednotek času
- M-3-2-02 popisuje jednoduché závislosti z praktického života
- M-3-2-03 doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel.

Učitel vede žáky na 1. stupni ZŠ v rámci tematického okruhu *Závislosti, vztahy, práce s daty* k tomu, aby rozpoznali určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznámili se s jejich reprezentacemi. Ukazuje, jak lze závislosti a změny matematicky popsat a využít v praxi. Žáci tyto závislosti analyzují z textu, z tabulek a diagramů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem. Připravují se tak, kromě jiného, i na použití souřadného systému (např. chozením po čtvercové síti).

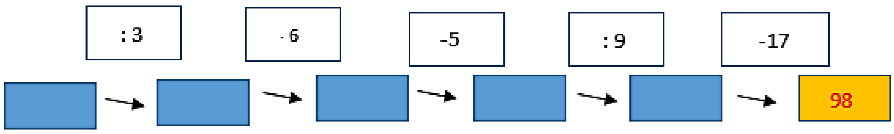
V tomto období nezavádíme pojmy proměnná a funkce, uplatňujeme však takové metody a postupy práce, které tyto pojmy „zahrnují“ (počítání předmětů je spojeno s přiřazováním; žák může vypozorovat, co platí při odčítání stejného čísla od různých čísel, nebo jak se mění výsledek operace v závislosti na změnách vstupních údajů apod.).

Pro rozvoj funkčního myšlení na 1. stupni zařazujeme různorodé aktivity. Jednou z možností jsou úlohy, které vedou k objevování závislostí a vztahů mezi čísly. Typickým příkladem jsou úlohy, ve kterých žáci doplňují čísla podle zadaných pravidel (tzv. magické čtverce, magické trojúhelníky, sčítací pyramidy aj.). Dvě takové úlohy jsou uvedeny na následujícím obrázku.





Dalším typem úloh jsou úlohy na doplňování řad, kde žáci buď pokračují v řadě podle daného vzoru, nebo hledají pravidlo, podle kterého je řada utvořena. Pro rozvoj funkčního myšlení zařazujeme úlohy typu „řetězec“ (viz následující obrázek).



Žáci pracují rovněž s číselnými tabulkami, doplňují obraz daného čísla podle daného pravidla. Využíváme však i opačný postup, z hodnoty obrazu určujeme hodnotu vzoru. Učíme žáky hledat v jízdních řádech, číst v nich dané údaje a interpretovat je.

Propedeutika pojmu přímé úměrnosti vychází z pochopení násobení. V tabulkách malé násobilky mohou žáci vypozorovat, že kolikrát se zvětší hodnota v prvním řádku, tolikrát se zvětší hodnota ve druhém řádku. Mluvíme o závislosti, kdy jednomu číslu přiřazujeme číslo druhé násobením daného čísla stále stejnou hodnotou. Příklad takovéto závislosti (násobení číslem 4) je uveden v následující tabulce.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Velmi odpovědně vedeme žáky ke schopnosti porozumět diagramům, případně i jednoduchým grafům. Žák by měl umět diagramy použít k řešení různých situací. Měl by se v nich orientovat, číst je a sestrojit. Nezapomínáme na úlohy, ve kterých žáci sami měří hodnoty, a poté je zpracují. (Např. *Od pondělí do neděle vždy přesně v 17 hodin naměř teplotu teploměrem před vaším domem. Naměřené údaje zaznamenej do tabulky, sestroj diagram.)* U takto naměřených dat budeme těžko hledat nějakou jednoduchou závislost a žáci si uvědomí, že ne všechno, co je dáno tabulkou, lze popsat nějakým jednoduchým pravidlem.

V neposlední řadě dbáme na využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech: odhady, měření, porovnávání, zpracování dat v tabulce, jejich interpretace, rozvíjení kombinatorického a logického myšlení. Vedeme žáky ke kritickému usuzování, srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů na odpovídající úrovni. Dále také k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely.

Očekávané výstupy tematického okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* jsou pro 1. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace do níže uvedených indikátorů (nastavených na minimální úroveň).

Očekávaný výstup	M-5-2-01 Žák vyhledává, sbírá a třídí data
Indikátory	1. žák provádí a zapisuje jednoduchá pozorování (měření teploty, průjezd aut za daný časový limit apod.) 2. žák porovnává zadaná data podle daného kritéria 3. žák posuzuje reálnost vyhledaných údajů
Očekávaný výstup	M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy
Indikátory	1. žák doplní údaje do připravené tabulky nebo diagramu 2. žák vyhledá v tabulce nebo diagramu požadovaná data 3. žák vyhledá údaje z různých typů diagramů (sloupcový a kruhový diagram bez použití procent) 4. žák používá jednoduché převody jednotek času při práci s daty (např. v jízdních řádech)

Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Doplň číselnou tabulku podle uvedeného pravidla, slovně toto pravidlo popiš:

	7	2	5	1	3	10	4	6	8	9
· 5 ↘										

Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci přiřazují číslům v tabulce hodnoty obrazů podle určité závislosti. Při práci s číselnou tabulkou nepracujeme s neznámou.

Na této úrovni obtížnosti je závislost přímo zadána (pod čísla v prvním řádku píšeme jejich pětinásobky). Žáci se musí v číselných tabulkách dobře orientovat a správně pomocí dané závislosti chybějící čísla doplnit. Důležité je nezadávat v prvním řádku tabulky čísla za sebou (např. 1, 2, 3, 4).

Žáci tak nemohou doplňovat druhý řádek automaticky přes řadu násobků a dochází u nich k rozvoji funkčního myšlení.
Pomocí vyplněné tabulky také můžeme žákům ukázat, že platí: *kolikrát se zvětší hodnota čísel v prvním řádku, tolikrát se zvětší hodnota čísel ve druhém řádku* (např. pro dvojici [1; 5] a [4; 20] se hodnoty zvětšily čtyřikrát).

7	2	5	1	3	10	4	6	8	9
35	10	25	5	15	50	20	30	40	45

Očekávaný výstup	M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Uvědom si (vypočítej), kolikrát je číslo 5 menší než číslo 15 a stejným způsobem zmenši ostatní čísla v druhém řádku tabulky. Tabulku doplň.

			5						
9	27	3	15	24	18	30	12	6	21

Možná řešení s metodickým komentářem

Na této úrovni obtížnosti se již snažíme žákům předkládat takové úlohy, kdy si závislost mohou z tabulky sami odvodit. Musíme však žákům vysvětlit, že pro odvození závislosti jedna dvojice nestačí. Může existovat víc jednoduchých řešení (např. 5 · 3 = 15 nebo 5 + 10 = 15) nebo závislost jednoduše popsat nelze. Proto je třeba zadat úlohu tak, aby řešení bylo jednoznačné.
Řešení:

3	**9**	**1**	5	**8**	**6**	**10**	**4**	**2**	**7**
9	27	3	15	24	18	30	12	6	21

Očekávaný výstup	M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Podobně jako v předchozích ilustrativních úlohách doplň číselnou tabulku:

1		2	6		3	8			13
9	37	16		65			107	30	

Nápověda: Vynásob číslo z prvního řádku určitým číslem a přičti k němu takové číslo, aby byl výsledek roven číslu ve druhém řádku (možné vyjádřit zápisem 1 · ○ + Δ = 9; 2 · ○ + Δ = 16).

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha nejvyšší obtížnosti již není zadána tabulkou přímé úměrnosti, jedná se o lineární funkci. Žáci musí nejprve zjistit ze dvou dvojic čísel dané pravidlo a poté dopočítat chybějící čísla v tabulce. Uvedená nápověda je nezbytná proto, aby žáci mohli danou závislost nalézt. Můžeme je také upozornit, že hledáme jednociferná čísla (jak plyne ze zápisu), takže možností, které budou zkoušet, není mnoho.
Řešení: 1 · **7** + **2** = 9; 2 · **7** + **2** = 16.

Protože ani doplnění tabulky po zjištění závislosti není jednoduché, doporučíme žákům, aby si svůj postup dobře promysleli a výsledky zkontrolovali. Pro správné vyplnění tabulky je třeba čísla z prvního řádku **vynásobit** číslem 7 a k výsledku **přičíst** číslo 2. Naopak od čísel z druhého řádku je třeba nejprve číslo 2 **odečíst** a výsledek potom **vydělit** číslem 7. Toto může být pro některé žáky nejtěžší část úlohy.

1	**5**	2	6	**9**	3	8	**15**	**4**	13
9	37	16	**44**	65	**23**	**58**	107	30	**93**

Očekávaný výstup	M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

V roce 2011 dali rodiče svým novorozeným dcerám 1 317 různých jmen. První tabulka zobrazuje pořadí deseti nejčastějších jmen dívek narozených v roce 2011 v celé České republice, druhá tabulka v Jihočeském kraji.

DÍVKY		
Pořadí	Jméno	Počet
1	ELIŠKA	2 304
2	TEREZA	2 301
3	ADÉLA	1 738
4	NATÁLIE	1 734
5	ANNA	1 690
6	KAROLÍNA	1 566
7	KATEŘINA	1 292
8	LUCIE	1 286
9	BARBORA	1 260
10	VERONIKA	1 214

Česká republika v roce 2011

DÍVKY		
Pořadí	Jméno	Počet
1	TEREZA	147
2	ELIŠKA	144
3	ADÉLA	103
4	ANNA	97
5	KATEŘINA	89
6	NATÁLIE	89
7	KAROLÍNA	88
8	LUCIE	84
9	NELA	82
10	BARBORA	73

Jihočeský kraj v roce 2011

Na základě porovnání jmen v obou tabulkách doplň v následujícím textu vynechané údaje.

Na prvních dvou místech jsou v opačném pořadí jména ………………… a …………………,
na třetím místě je shodně jméno ………………. .
Jedno jméno je mezi prvními deseti nejoblíbenějšími jmény v tabulkách rozdílné. V tabulce Jihočeského kraje je to jméno …………………, v tabulce České republiky je to jméno ………………… .

Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci hledají v tabulkách data podle zadaného kritéria a doplňují text.
Na prvních dvou místech jsou v opačném pořadí jména **Tereza** a **Eliška**, na třetím místě je shodně jméno **Adéla**.
Jedno jméno je mezi prvními deseti nejoblíbenějšími jmény v tabulkách rozdílné. V tabulce Jihočeského kraje je to jméno **Nela**, v tabulce České republiky je to jméno **Veronika**.

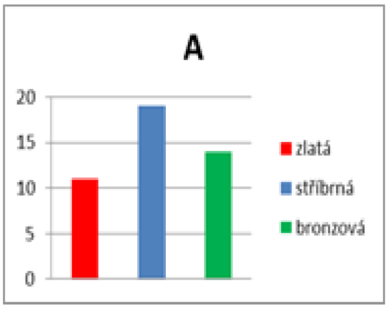
Očekávaný výstup	M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

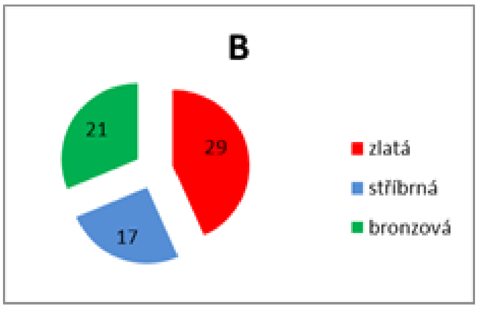
Ilustrativní úloha 5	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

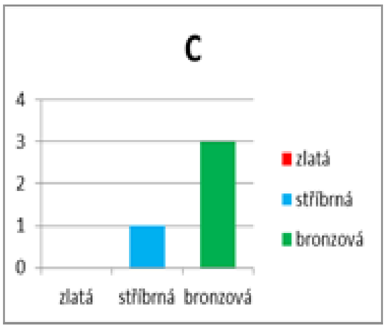
Na letních olympijských hrách 2012 v Londýně získala Velká Británie 29 zlatých, 17 stříbrných a 19 bronzových medailí. Německo získalo 11 zlatých, 19 stříbrných a 14 bronzových medailí. Reprezentanti České republiky přivezli domů 4 zlaté, 3 stříbrné a 3 bronzové medaile, reprezentanti Slovenska pouze 1 stříbrnou a 3 bronzové medaile. Diagramy A-D znázorňují počty získaných medailí jednotlivých států.

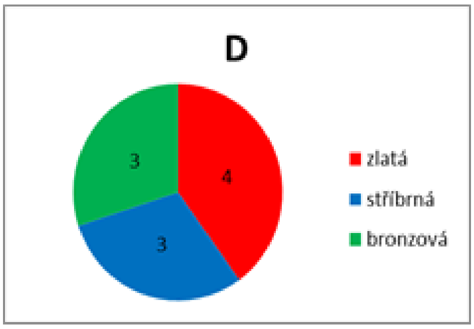
a) Zapiš dané údaje do přehledné tabulky.

b) Ke každému diagramu připiš jméno odpovídajícího státu. Zkontroluj, zda počty medailí, které jsou v diagramech znázorněny, odpovídají skutečnosti. Případnou chybu oprav.









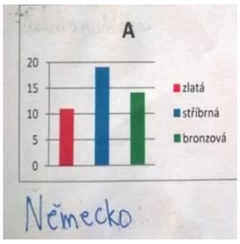
Možná řešení s metodickým komentářem

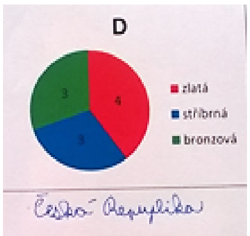
a) Jeden z možných návrhů přehledné tabulky:

Státy	**Zlaté medaile**	**Stříbrné medaile**	**Bronzové medaile**
Velká Británie	**29**	**17**	**19**
Německo	**11**	**19**	**14**
Česká republika	**4**	**3**	**3**
Slovensko	**0**	**1**	**3**

b)

V této části úlohy musí žáci rozumět různým typům grafů a správně přiřadit k jednotlivým grafům údaje uvedené v textu. Při hledání nesprávného údaje v předložených grafech žáci pracují s chybou. Přiřazení států ke grafům (**A – Německo, B - Velká Británie, C - Slovensko, D - Česká republika**) nedělá většinou žákům problémy. Aby mohl být graf B přiřazen Velké Británii, **musí být nesprávný počet bronzových medailí 21 opraven na 19**. Tuto chybu však řada žáků neodhalí.



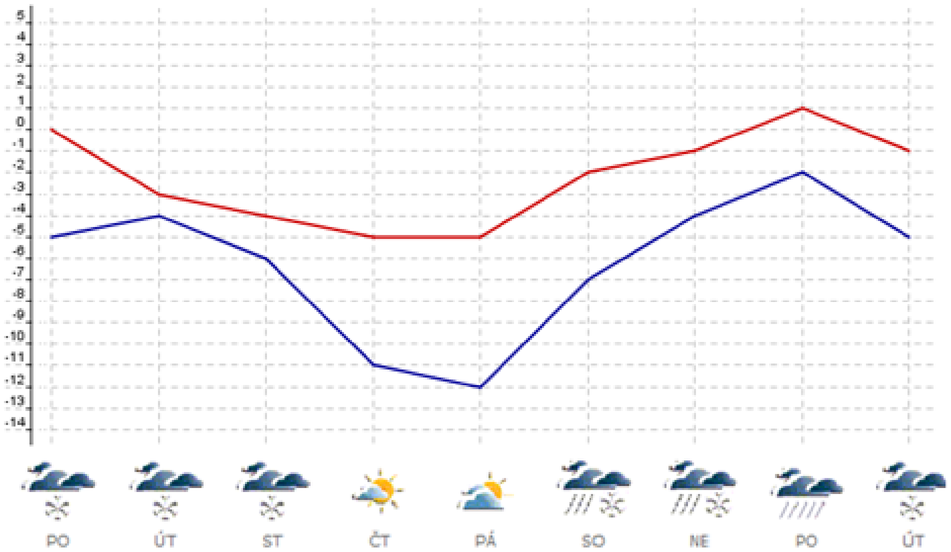


Chyba je u Velké Británie. Dostala totiž 19 medailí a ne 21.

Očekávaný výstup	M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Následující obrázek znázorňuje vývoj počasí v období od pondělí 10. prosince do úterý 18. prosince.



Meteorologické značky znázorňují druh srážek nebo počasí beze srážek.

Červená křivka znázorňuje nejvyšší denní naměřenou teplotu.

Modrá křivka znázorňuje nejnižší noční naměřenou teplotu.

a) Vyhledej potřebné údaje a doplň tabulku:

Den v týdnu	Nejvyšší denní naměřená teplota	Nejnižší noční naměřená teplota
Pondělí 10. 12.		
		-12°C

b) Zjisti, zda jsou následující tvrzení pravdivá.

1.	Ve středu sněžilo.	Ano	Ne
2.	Každé pondělí sněžilo.	Ano	Ne
3.	Ve čtvrtek 13. prosince byl největší rozdíl mezi denní a noční teplotou.	Ano	Ne
4.	V pondělí 17. prosince teplota vystoupila nad bod mrazu.	Ano	Ne

Možná řešení s metodickým komentářem

Na excelentní úrovni by se měli žáci dokázat orientovat i v jednoduchých grafech. Musí správě odečíst zobrazené kladné a záporné hodnoty na svislé ose, porozumět meteorologickým značkám a orientovat se kalendáři. Správné řešení doporučujeme ukázat a vysvětlit na zobrazeném grafu na interaktivní tabuli a procvičit s žáky vyhledávání dalších údajů (Např. Kdy pršelo? Kolik stupňů bylo ve středu? Jaké počasí bylo ve čtvrtek?).

Řešení:

a)

Den v týdnu	Nejvyšší denní naměřená teplota	Nejnižší noční naměřená teplota
Pondělí 10. 12.	**0°C**	**-5°C**
Pátek 14. 12.	**-5°C**	-12°C

b)

1. Ve středu sněžilo. **Ano**
2. Každé pondělí sněžilo. **Ne**
3. Ve čtvrtek 13. prosince byl největší rozdíl mezi denní a noční teplotou. **Ne**
4. V pondělí 17. prosince teplota vystoupila nad bod mrazu. **Ano**

Poznámka: porozumět spojnicovému grafu, který zobrazuje vývoj počasí, je pro žáky velmi obtížné. K chybám dochází při čtení kladných a záporných čísel, chybně žáci přiřazují správné datum k jednotlivým dnům, většinou se neumí rozhodnout, zda je tvrzení pravdivé, když jsou v grafu dvě pondělí.

Očekávaný výstup	M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	excelentní

Pozorně si prohlédni tabulku odjezdů autobusové linky č. 5 ze stanice Rožnov v Českých Budějovicích.

SEZNAM ZASTÁVEK	Jízda v minutách	Čas	Pracovní den	Pracovní den Prázdniny	Sobota Neděle, svátky
Rožnov-točna		03			
Rožnov	**0**	04	37 51	32 56	32
Nám. Bratří Čapků	**1**	05	11 26 41 56	11 26 41 56	07 37
Antala Staška	**2**	06	06 16 26 36 46 56	11 23 35 47 59	07 37
Jana Buděšínského	**3**	07	06 16 26 36 46 56	11 23 35 47 59	07 37
Nemocnice	**5**	08	06 16 26 36 48	11 23 35 48	04 24 44
Samson	**6**	09	03 18 33 48	03 18 33 48	04 24 44
Poliklinika Jih	**7**	10	03 18 33 48	03 18 33 48	04 24 44
U Soudu	**9**	11	03 18 33 48	03 18 33 48	04 24 44
Senovážné náměstí	**10**	12	03 18 33 48	03 18 33 48	04 24 44
Nádraží	**13**	13	03 16 26 36 46 56	03 18 33 47 59	04 24 44
Skuherského	**16**	14	06 16 26 36 46 56	11 23 35 47 59	04 24 44
Palackého nám.	**17**	15	06 16 26 36 46 56	11 23 35 47 59	04 24 44
Jírovcova	**18**	16	06 16 26 36 46 56	11 23 35 48	04 24 44
Družba-Igy	**20**	17	06 18 33 48	03 18 33 48	07 37
Strakonická	**23**	18	03 18 33 48	03 18 33 48	07 37
Voříškův Dvůr	**25**	19	03 23 43	03 23 43	07 37
Vltava střed	**26**	20	07 37	07 37	07 37
U Výměníku	**28**	21	07 37	07 37	07 37
Evžena Rošického	**30**	22	07 38	07 38	07 38
Václava Talicha	**31**	23	08	08	08
Jaroslava Bendy	**33**				
Máj-Antonína Barcala	**34**				

A)

a) Kolikrát odjíždí autobus ze zastávky Rožnov mezi 7. a 8. hodinou v pracovní den o prázdninách?
b) Kolikrát odjíždí autobus ze zastávky Rožnov mezi 7. a 8. hodinou o víkendu?
c) Jak dlouho jede autobus z Rožnova na nádraží?

B)

a) Jak dlouho jede autobus MHD ze stanice Nemocnice na konečnou zastávku (Máj)?
b) V kolik hodin přijedeš na zastávku Václava Talicha, jestliže pojedeš v pracovní den o prázdninách ze zastávky Rožnov v 8:35?
c) V kolik hodin nejpozději musíš vyjet v sobotu ze stanice Rožnov, aby ti neujel vlak, který odjíždí z nádraží v půl jedenácté dopoledne?

Možná řešení s metodickým komentářem

Učíme žáky orientaci v tabulce, vysvětlujeme záhlaví tabulky a příslušnou legendu. Společnou diskusí vedeme žáky k orientaci v čase a místě – učitel a poté i žáci zadávají čas odjezdu ve zvoleném nástupním místě podle údajů v jízdním řádu, hledají odpovídající časy příjezdů, určují dobu jízdy.
Při zadání úlohy žákům pátých tříd se velká většina z nich v jízdním řádu orientovat nedokázala. Po vysvětlení a společném krátkém procvičení (s případným využitím interaktivní tabule) už dokázali žáci na otázky bez problémů odpovědět.
Úlohu učitel může přizpůsobit místu, kde se nachází škola nebo bydliště žáků. Žákům lze ukázat možnosti a způsob internetového vyhledávání potřebných údajů na adresách
http://www.dpmcb.cz/; IDOS - MHD České Budějovice - Vyhledání spojení nebo
http://jizdnirady.idnes.cz/ceskebudejovice/spojeni/ .

A)

a) Autobus odjíždí ze zastávky Rožnov mezi 7. a 8. hodinou v pracovní den o prázdninách **pětkrát**.
b) Autobus odjíždí ze zastávky Rožnov mezi 7. a 8. hodinou o víkendu **dvakrát**.
c) Jízda z Rožnova na nádraží trvá **13 minut**.

B)

a) Žáci musí nejprve vyhledat v jízdním řádu dobu jízdy celé trasy (34 minut) a od ní odečíst dobu, za kterou dojede autobus z Rožnova k nemocnici (5 minut).
   Autobus ze stanice Nemocnice na konečnou zastávku jede **29 minut**.
b) Žáci musí použít převody jednotek času, protože k 8 hodinám 35 minutám (čas odjezdu) přičítají 31 minut (doba jízdy).
   Na zastávku Václava Talicha přijedeš v **9:06**.
c) Doba jízdy z Rožnova k nádraží je 13 minut. Žáci řeší problém, v kolik hodin musí vyjet, jestliže pojedou 13 minut a musí stihnout vlak v 10:30.
   Ze stanice Rožnov musíš nejpozději vyjet v **10:04**.

Žáci často chybují zbytečně (např. pracují s odjezdy pro všední den místo soboty). Často neudělají předem odhad a po výpočtu nezkontrolují reálnost získané hodnoty (např. Jestliže vlak odjíždí v půl jedenácté, nemohu z domu vyjít čtyři minuty po dvanácté!). U řešení tohoto úkolu se nabízí společná diskuze o tom, že pro každého může být čas potřebný k tomu, aby stihli vlak, jiný. Někomu může stačit nejpozdější možný odjezd, někdo může namítnout, že si ještě musí koupit lístek, nebo to na nádraží nezná, a proto by musel vyjet dříve.

Očekávané výstupy	M-5-2-01 Žák vyhledává, sbírá a třídí data M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Pan a paní Sýkorovi se svými třemi dětmi ve věku 5, 8 a 12 let chtějí podniknout celodenní výlet k Vrbenským rybníkům (zastávka České Vrbné) v Českých Budějovicích. Z domova (zastávka Pohůrka-kulturní dům) chtějí vyjet v sobotu kolem osmé hodiny a vrátit se domů nejpozději v 18 hodin. Vyhledej pro ně nejvýhodnější spojení a jízdné.

1) V kolik hodin musí Sýkorovi vyjet a kdy se mohou vrátit? Jakými spoji (čísla autobusových linek MHD) musí Sýkorovi jet, kde budou přestupovat, jak dlouho budou čekat na další spoj?
2) Kolik celkem zaplatí za jízdenky MHD? Vyhledej cenově nejvýhodnější možnost.

Nápověda:

a) Tarify jízdného pro MHD můžeš vyhledat na adrese http://www.dpmcb.cz/info-pro-cestujici/tarif-jizdneho-mhd/.
b) Nejsnazší vyhledání potřebného spojení - IDOS - MHD České Budějovice - Vyhledání spojení nebo http://jizdnirady.idnes.cz/ceskebudejovice/spojeni/
c) Pokud nemáš k dispozici internet, použij pro řešení úlohy následující tabulky (viz též Příloha 1 a Příloha 2):

JEDNOTLIVÉ JÍZDENKY	**20 minut**	**60 minut**	**24 hodin**	**168 hodin (7-denní)**	**60 minut (prodej u řidiče)**
Osoba starší 16-ti let věku a důchodce do 70-ti let věku	**13,- Kč**	**16,- Kč**	**50,- Kč**	**190,- Kč**	**25,- Kč**
Děti od 6-ti do 15-ti let (včetně)	**6,- Kč**	**7,- Kč**	**20,- Kč**	**190,- Kč**	**10,- Kč**

SMS JÍZDENKY	**60 minut**	**24 hodin**
Osoba starší 16-ti let věku a důchodce do 70-ti let věku	**25,- Kč**	**70,- Kč**
Děti od 6-ti do 15-ti let (včetně)	**25,- Kč**	**70,- Kč**

HROMADNÉ JÍZDENKY	**CENA**	**DOBA PLATNOSTI**
Rodinná jízdenka pro max. 2 osoby starší 16-ti let a max. 3 děti do 15-ti let (včetně)	**100,- Kč**	**VÍKEND *)**
Hromadná školní jízdenka pro max. 30 dětí do 15-ti let (včetně) a max. 2 dospělé osoby jako doprovod	**200,- Kč**	**240 minut (4 hodiny)**

*) Rodinná jízdenka je platná v sobotu (SO) a neděli (NE) a ve státem uznaných svátcích (st. svátek).
Platnost jízdenky je od 00.00 hodin SO (st. svátek) do 24.00 hodin (NE) nebo konec st. svátku.
Tato jízdenka je platná pro max. 2 dospělé osoby a 3 osoby do 15 let věku (včetně).
Všechny jednotlivé jízdenky jsou přestupní.

Dopolední spoje do Českého Vrbného

	Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
27.9.	Pohůrka-kulturní dům	>	6:31		10
	Nádraží (vlakové a autobusové)	6:41	7:05		9
	České Vrbné	7:24			
	Celkový čas **53 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
Pohůrka-kulturní dům	>	8:06		13
Nádraží (vlakové a autobusové)	8:15	8:25		9
České Vrbné	8:44			
Celkový čas **38 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
Pohůrka-kulturní dům	>	9:31		13
Nádraží (vlakové a autobusové)	9:40	9:45		9
České Vrbné	10:04			
Celkový čas **33 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Večerní spoje na Pohůrku

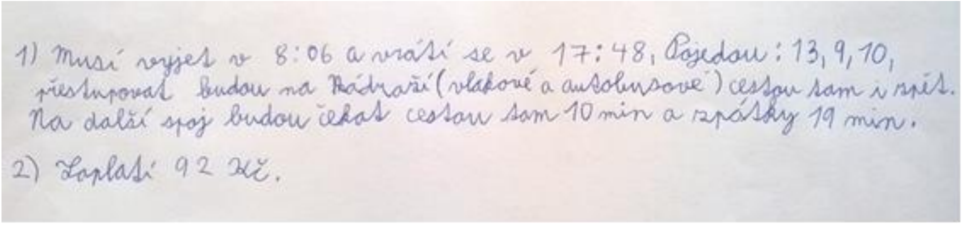
Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
České Vrbné		17:00		9
Nádraží (vlakové a autobusové)	17:20	17:39		10
Pohůrka-kulturní dům	17:48	>		
Celkový čas **48 min**, vzdálenost **11 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
České Vrbné		17:20		9
Nádraží (vlakové a autobusové)	17:40	18:00		13
Pohůrka-kulturní dům	18:09	>		
Celkový čas **49 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Možná řešení s metodickým komentářem

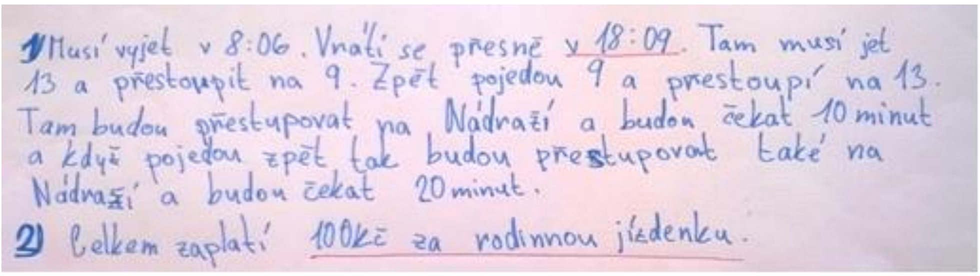
Na excelentní úrovni je vhodné doplnit úlohy o práci žáků s internetovými zdroji, samostatné vyhledávání spojů MHD, autobusových či vlakových spojů a plánování cest včetně cenových kalkulací. Žáci mohou pracovat samostatně nebo ve dvojicích. Při společné kontrole výsledku je možné doplnit úlohu o další úkoly (např. vysvětli, proč se liší čas i délka cesty tam a zpět.).

Řešení:


1) Musí vyjet v 8:06 a vrátí se v 17:48, Pojedou: 13, 9, 10, přestupovat budou na Nádraží (vlakové a autobusové) cestou tam i zpět. Na další spoj budou čekat cestou tam 10 min a zpátky 19 min.

2) Zaplatí 92 Kč.

Cena jízdenek: 2 · 16 Kč (dospělí) + 2 · 7 Kč (děti) = 46 Kč; za dvě cesty zaplatí 92 Kč.
Sýkorovi si musí zakoupit 4 jízdenky za 16 Kč a 4 jízdenky za 7 Kč. Takto zakoupené jízdenky jsou o 8 Kč levnější než rodinná jízdenka na víkend.
Ukázka žákovského řešení s chybami


1) Musí vyjet v 8:06. Vrátí se přesně v 18:09. Tam musí jet 13 a přestoupit na 9. Zpět pojedou 9 a přestoupí na 13. Tam budou přestupovat na Nádraží a budou čekat 10 minut a když pojedou zpět tak budou přestupovat také na Nádraží a budou čekat 20 minut.

2) Celkem zaplatí 100Kč za rodinnou jízdenku.

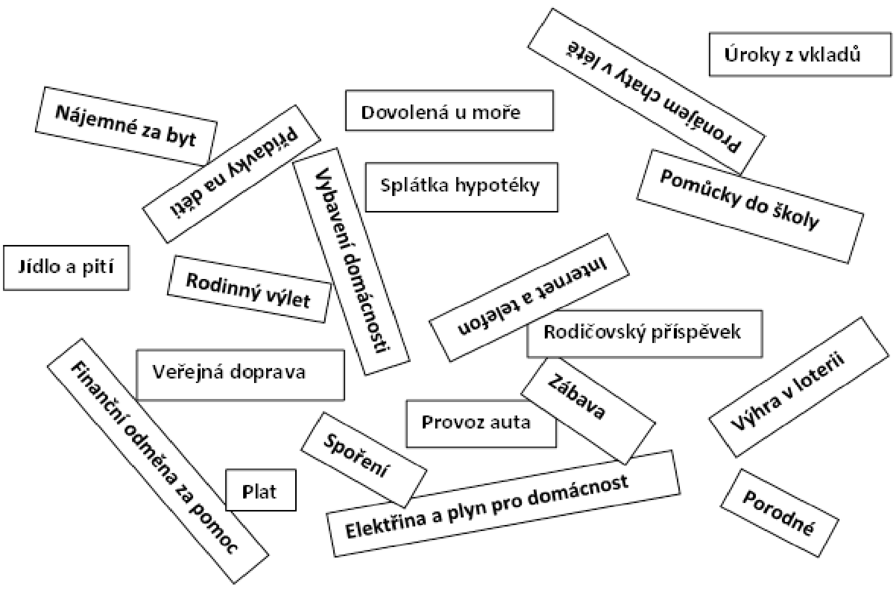
Poznámka: žáci při řešení často volili spoj, který přijede až v 18:09, což neodpovídá zadání (do 18 hodin). Nepočítali ceny jednotlivých jízdenek a okamžitě se rozhodli pro rodinnou jízdenku, což v tomto případu nebylo cenově nejvýhodnější.

Očekávané výstupy	M-5-2-01 Žák vyhledává, sbírá a třídí data M-5-2-02 Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Ilustrativní úloha 9	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Maminka si napsala na lístečky, jaké má příjmy a jaké výdaje v rodinném rozpočtu.

a) Které položky patří do příjmů a které do výdajů?
b) Které z rodinných výdajů jsou nezbytné a které zbytné?
c) Které z rodinných příjmů jsou pravidelné a které nahodilé?



Možná řešení s metodickým komentářem	
Žák musí předložená data porovnat a roztřídit podle zadaných kritérií, která se vztahují k finanční gramotnosti. Žák při porovnávání dat vychází ze své každodenní zkušenosti. Řešení: a) **Příjmy:** Přídavky na děti, Finanční odměna za pomoc, Plat, Rodičovský příspěvek, Porodné, Výhra v loterii, Úroky z vkladů, Pronájem chaty v létě. **Výdaje:** Nájemné za byt, Jídlo a pití, Rodinný výlet, Veřejná doprava, Spoření, Elektřina a plyn pro domácnost, Zábava, Provoz auta, Vybavení domácnosti, Splátka hypotéky, Dovolená u moře, Internet a telefon, Pomůcky do školy. b) **Výdaje nezbytné:** Nájemné za byt, Jídlo a pití, Veřejná doprava, Spoření, Elektřina a plyn pro domácnost, Vybavení domácnosti, Splátka hypotéky, Internet a telefon, Pomůcky do školy. **Výdaje zbytné:** Rodinný výlet, Zábava, Provoz auta, Dovolená u moře. c) **Příjmy pravidelné:** Přídavky na děti, Plat, Rodičovský příspěvek, Úroky z vkladů. **Příjmy nahodilé:** Finanční odměna za pomoc, Výhra v loterii, Porodné, Pronájem chaty v létě.	
Očekávaný výstup	M-5-2-01 Žák vyhledává, sbírá a třídí data

Druhý stupeň ZŠ

V návaznosti na výuku na prvním stupni základní školy pokračujeme v budování základních pojmů v okruhu *Závislosti, vztahy, práce s daty*. Vedeme žáky k rozpoznávání určitých typů změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamujeme žáky s jejich reprezentacemi. Ukazujeme, jak lze závislosti a změny matematicky popsat a využít v praxi. Tyto závislosti žáci zjišťují z tabulek, diagramů a grafů, slovně je popisují. V jednoduchých případech sami sestrojují grafy a diagramy, případně závislosti vyjadřují matematickým předpisem.

Žáci rozlišují vztah přímé a nepřímé úměrnosti, sestavují příklady s užitím jednoduchých závislostí, naučí se vyjádřit funkční vztah jak tabulkou, tak rovnicí či grafem, používají souřadný systém. Při práci s různými reprezentacemi matematických závislostí (slovní vyjádření, tabulka, graf, matematický předpis, vzorec) posilujeme funkční myšlení žáků. Vedeme žáky k vyhledávání reálných situací a formulování slovních úloh. Zkoumání těchto závislostí postupně směřuje k zavedení pojmu **funkce.**

V matematice se můžeme v zásadě setkat s dvojím pojetím funkce. Je chápána buď jako přiřazení nebo jako relace. V učebnicích matematiky pro ZŠ je funkce zpravidla zaváděna jako **předpis** (pravidlo, přiřazení), které každému prvku z jisté množiny přiřadí právě jedno reálné číslo. Definování pojmu funkce na základní škole je složitou otázkou. Ukazuje se, že definici funkce žáci často chápou pouze formálně.

Jako motivace při utváření pojmu funkce se často používá několik příkladů závislostí z reálného života, v další výuce se však žáci s interpretací závislostí z praxe setkávají spíše vzácně. Pamatujme, že schopnost správně interpretovat graf funkce se rozvíjí tehdy, jsou-li žákům předkládány k řešení úlohy o závislostech s reálným a aktuálním kontextem, které odpovídají zkušenostem žáků. Je třeba mít na paměti, že mnozí žáci neumí spojit do souvislostí různé pojmy, které si vystavěli ve své poznatkové struktuře během studia matematiky, protože je mají zařazeny v oddělených „přihrádkách“. Proto například ve formulacích úloh nemusíme explicitně používat pojem funkce (zdůrazňujeme funkční závislosti či situaci z běžného života a ne „kapitolu v učebnici“). Zařazujeme jednoduché úlohy z finanční matematiky i takové úlohy, které jsou netypické. V zadání využíváme grafy a tabulky různě graficky zpracované. Zařazujeme úlohy, které představují přesah do jiných vzdělávacích oblastí. Nezapomínáme na úlohy, v nichž popisované přiřazení není funkční závislostí (jednomu objektu je přiřazeno více „hodnot“).

V důsledku nepromyšlené práce ve výuce často dochází k tomu, že si žák vytváří mylnou představu o tom, že bez předpisu funkce neexistuje. Je potřeba ve výuce zdůraznit, že analytický předpis je někdy velmi těžké nebo nemožné odvodit.

Podobně i při práci s grafy je nutné vytvářet představy úplné. Žáci při rozhodování, zda daný graf je grafem funkce či nikoli, porovnávají zadané grafy s reprezentanty takových funkcí, které jim učitel již představil, a jiné grafy za funkce nepovažují. Při jejich rozhodování hraje roli „podobnost“ se známou situací. Žáci mají malou zkušenost s „nestandardními“ grafy. Stejně tak grafy, které jsou „pospojované“ z několika známých grafů, jsou pro ně často problematické. Žáci také zaměňují pojmy závisle – nezávisle proměnná, nedokáží si poradit s posunutím známého grafu funkce v kartézské souřadné soustavě, vhodně volit měřítko apod.

Žáci vyhledávají a vhodným způsobem třídí data, zpracovávají je a porovnávají soubory dat. Sestavují tabulky, využívají různé typy diagramů. Pracují s matematickými programy na kalkulátorech, počítačích či tabletech.

Při práci s daty pokračujeme s budováním základních pojmů popisné statistiky, která zjišťuje a sumarizuje informace, zpracovává je ve formě diagramů a tabulek a vypočítává jejich číselné charakteristiky. Zařazujeme úlohy, které se týkají třídění daných údajů, jejich zaznamenávání do tabulek, využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech (např. odhady, měření). Žáci používají základní termíny: statistický soubor, rozsah statistického souboru, statistická jednotka, statistický znak a jeho hodnota, četnost, aritmetický průměr. Někdy se výuka v oblasti matematické statistiky zužuje na bezduché výpočty jednotlivých charakteristik bez jejich interpretace či pochopení. Proto je vhodné se žáky zpracovávat různá statistická šetření.

Vhodným příkladem statistického šetření je *hra na obuvnickou firmu*. Žáci změří délku chodidel svých spolužáků, podle šablony velikostí obuvi je zařadí do tabulky a pak navrhnou plán výroby jednotlivých velikostí bot.

Na zvážení vyučujícího lze ponechat, zda zmíní pojem **medián** a **modus**[12], jako další charakteristiky statistického souboru. Pokud se učitel rozhodne s pojmy medián a modus žáky seznámit, nemusí nutně trvat na přesných termínech z hlediska jazyka matematiky (nemusí pojem modus používat, může pracovat například s termínem *hodnota znaku s nejvyšší četností*). K zavedení těchto pojmů můžeme využít výše zmíněné statistické měření. (Motivační otázka: *Pokud bychom chtěli například začít vyrábět obuv pro děti, diskutujte, zda by aritmetický průměr vzorku rozměrů chodidel dětí (třeba 1000 dětí) byl vhodnější charakteristikou než modus tohoto souboru, tedy hodnota znaku s nejvyšší četností.* Odpověď žáka: *Když budu chtít šít boty, bude mne pro velikosti bot asi spíš zajímat, která naměřená velikost tam bude nejvíc … než hodnota průměrná… tu budu vyrábět nejvíc.*)

Při výuce je vhodné s žáky diskutovat o významu statistiky jako matematické disciplíny. Je třeba je upozornit, že úkolem statistika je pracovat s daty a jejich interpretacemi tak, aby co nejlépe odpovídaly reálnému stavu věcí, aby co nejlépe vypovídaly o dané situaci. Data by se neměla žádným způsobem zneužívat k dezinformacím jakéhokoli druhu.

Očekávané výstupy tematického okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* jsou pro 2. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace do níže uvedených indikátorů nastavených na minimální úroveň.

Očekávaný výstup	M-9-2-01 Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data
Indikátory	1. žák vyhledá potřebné údaje v tabulce, diagramu a grafu 2. žák vyhledá a vyjádří vztahy mezi uvedenými údaji v tabulce, diagramu a grafu (četnost, aritmetický průměr, nejmenší a největší hodnota) 3. žák pracuje s časovou osou 4. žák převádí údaje z textu do tabulky, diagramu a grafu a naopak 5. žák samostatně vyhledává data v literatuře, denním tisku a na internetu
Očekávaný výstup	M-9-2-02 Žák porovnává soubory dat
Indikátory	1. žák porovná kvantitativní vztahy, které jsou uvedeny v různých tabulkách nebo v tabulce a diagramu
Očekávaný výstup	M-9-2-03 Žák určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti
Indikátory	1. žák vytvoří tabulku pro přímou a nepřímou úměrnost na základě textu úlohy 2. žák rozliší přímou a nepřímou úměrnost z textu úlohy

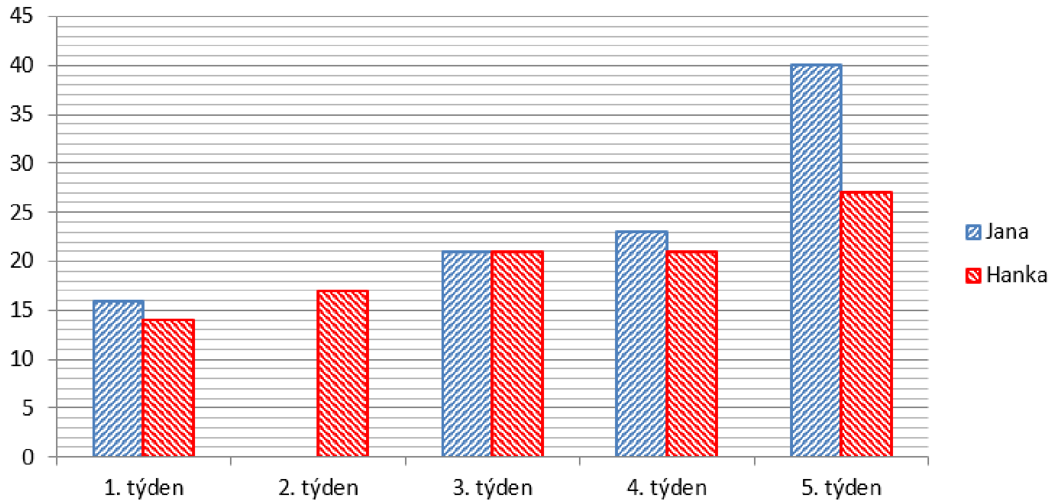
[12] **Medián** je hodnota, která dělí řadu vzestupně seřazených číselných hodnot na dvě stejně početné skupiny. Pro nalezení mediánu daného souboru stačí číselné hodnoty seřadit podle velikosti. Je-li počet prvků souboru liché číslo, je medián to číslo, které se nalézá uprostřed. Pokud má soubor sudý počet prvků, za medián označujeme aritmetický průměr dvou prostředních čísel. **Modus** je hodnota, která se objevuje v daném statistickém souboru nejčastěji, je to tedy hodnota znaku s největší četností.

Očekávaný výstup	M-9-2-04 Žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem
Indikátory	1. žák pozná funkční závislost z textu úlohy, z tabulky, z grafu a z rovnice 2. žák přiřadí funkční vztah vyjádřený tabulkou k příslušnému grafu a naopak 3. žák vyčte z grafu podstatné informace (např. nejmenší a největší hodnota, růst, pokles)
Očekávaný výstup	M-9-2-05 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů
Indikátory	1. žák vybere odpovídající funkční vztah, který popisuje jednoduchou reálnou situaci

Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Sportovkyně Jana a Hanka si vedou zápisy o tom, kolik kilometrů týdně každá z nich uběhla.
Pozorně si prohlédni diagram, zachycující počet kilometrů, které obě dívky uběhly v průběhu pěti týdnů.



A)

a) Kolik kilometrů uběhla 4. týden Jana a kolik Hanka?
b) O kolik km celkem uběhla Hanka za 1. a 2. týden více než Jana?
c) Urči, zda jsou pravdivá následující tvrzení:

Za 3. a 4. týden v součtu uběhla Jana více km než Hanka.	ANO	NE
Hanka svůj týdenní výkon stále zlepšovala.	ANO	NE

B)

a) Urči průměrný týdenní a denní výkon Hanky a Jany za pětitýdenní období.
b) Vypovídá průměrný týdenní výkon obou dívek o výkonech v jednotlivých týdnech?
c) Urči, zda je pravdivé následující tvrzení:

V 5. týdnu byl mezi výkony dívek největší rozdíl.	ANO	NE

C)

V šestém týdnu děvčata plánují uběhnout stejný počet kilometrů, jako uběhla ve 3. týdnu.

a) Do tabulky pro ně připrav dva rozdílné tréninkové plány (děvčata nemusí běžet každý den).

6. týden	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne
Jana [km]							
Hanka [km]							

b) Z doplněných dat v tabulce urči denní aritmetický průměr a medián.
c) K údajům z tabulky sestroj diagram, který nebude sloupcový (narýsuj nebo využij počítačový program).

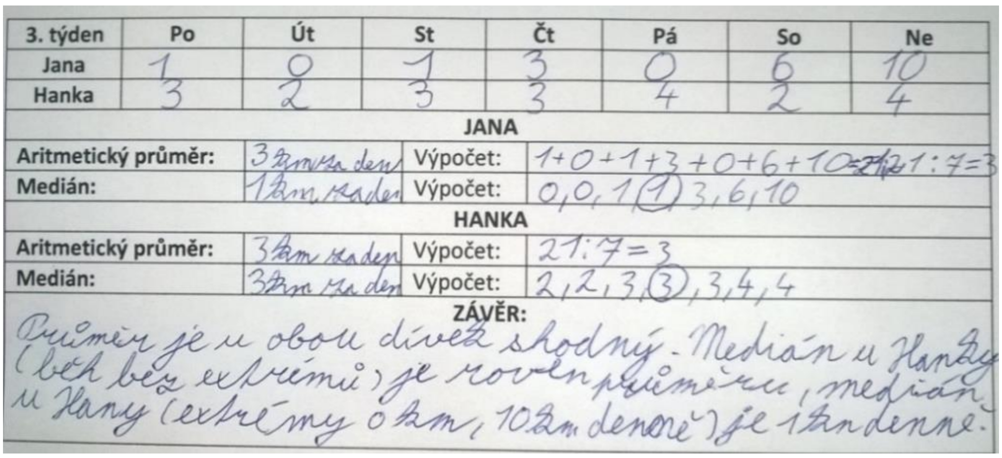
Možná řešení s metodickým komentářem

A)
Pro grafickou reprezentaci dat byl v úloze použit sloupcový diagram, který patří k nejčastěji používaným. Žáky vedeme ke správné orientaci v diagramu, k přesnému odečtu zobrazených hodnot na základě porozumění legendě a údajům, které jsou zobrazovány na obou osách.

a) Ve 4. týdnu Jana uběhla 23 km a Hanka 21 km.
b) Jana uběhla za 1. a 2. týden celkem 16 km (16 + 0). Hanka uběhla 31 km (14 + 17). Hanka uběhla za 1. a 2. týden o 15 km více.
c) ANO – Jana uběhla více km než Hanka.
NE – Hanka uběhla ve 3. a 4. týdnu stejný počet km.

B)
a) Jana - celkem 100 km (16 + 0 + 21 + 23 + 40). Hanka - celkem 100 km (14 + 17 + 21 + 21 + 27);
Obě dívky naběhaly za 5 týdnů stejný počet kilometrů.
Obě uběhly průměrně 20 km týdně (100 : 5), 2,9 km denně (100 : 35 = 2,9).
b) Pracujeme s pojmem aritmetický průměr s cílem upevnění pojmu a chápání jeho praktického významu. Žáci mají aritmetické průměry porovnávat, poznávat tím jejich charakteristické vlastnosti. Důležitá je diskuse řízená učitelem, která by měla směřovat k objasnění pojmu aritmetický průměr v kontextu zadané situace.
Obě dívky uběhly stejný počet kilometrů (100 km), obě běhaly průměrně 20 km týdně, avšak jejich týdenní výkony byly velmi rozdílné (např. ve 2. týdnu Jana vůbec neběhala). Aritmetický průměr je proto jen hrubou, v tomto případě nevypovídající charakteristikou.
c) NE – největší rozdíl mezi výkony obou dívek (17 km) byl v 2. týdnu.

C)
V excelentní obtížnosti mají žáci za úkol modelovat podle vlastního uvážení různé varianty vzdáleností, které by děvčata v šestém týdnu v jednotlivých dnech mohla uběhnout. Tato data mají zapsat do tabulky a následně sestrojit diagram.



3. týden	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne
Jana	1	0	1	3	0	6	10
Hanka	3	2	3	3	4	2	4

JANA

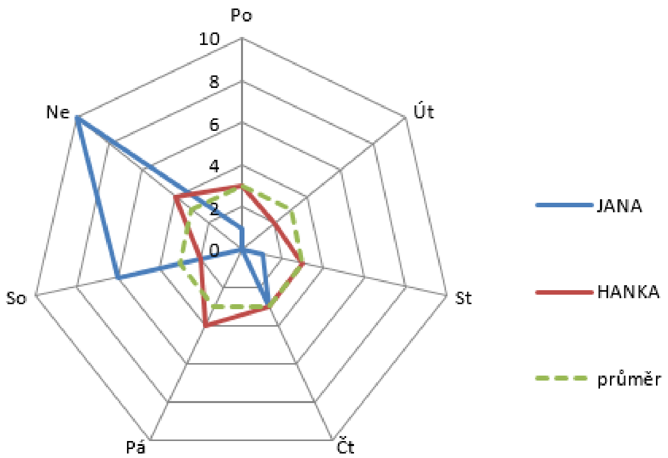
Aritmetický průměr:	3 km za den	Výpočet:	1+0+1+3+0+6+10=21 21:7=3
Medián:	1 km za den	Výpočet:	0,0,1,1,3,6,10

HANKA

Aritmetický průměr:	3 km za den	Výpočet:	21:7=3
Medián:	3 km za den	Výpočet:	2,2,3,3,3,4,4

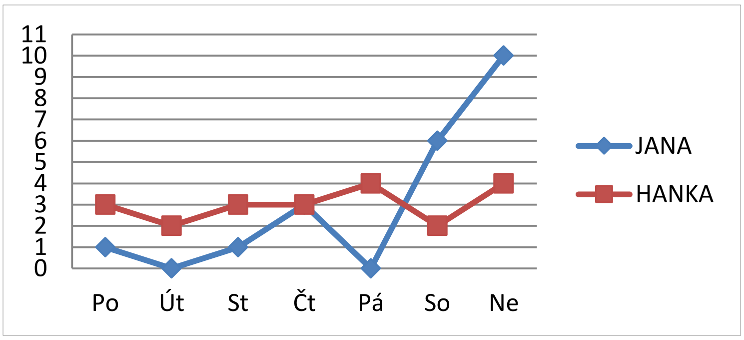
ZÁVĚR:
Průměr je u obou dívek shodný. Medián u Hanky (běh bez extrémů) je roven průměru, medián u Hany (extrémy 0 km, 10 km denně) je 1 km denně.

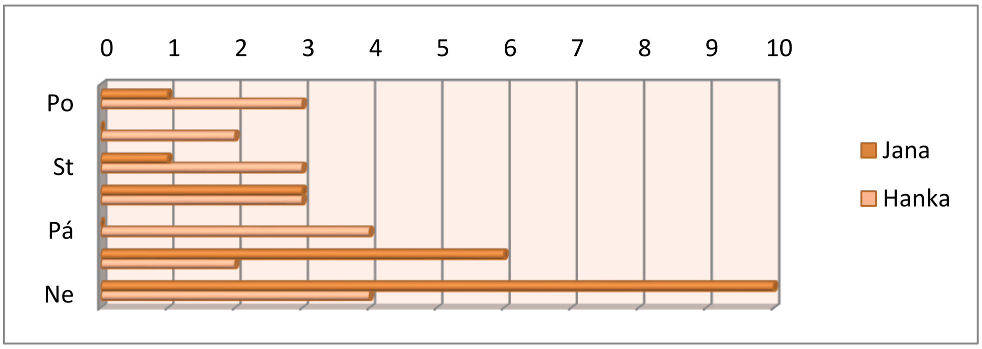
Diagram mohou žáci narýsovat nebo použít některý z počítačových programů. Při využití počítače žáci mohou snadno volit typ diagramu, volit vhodné popisy os, měnit barvu pro lepší orientaci v diagramech apod. To jen s tužkou a papírem není možné. V následujícím žákovském řešení je zachycen v paprskovitém diagramu pro přehlednost i aritmetický průměr.



Počty kilometrů, které uběhla v jednotlivých dnech Hanka, se pohybují právě kolem průměrné hodnoty. Výkon Jany bychom mohli označit jako nepravidelný. Žáci tuto situaci komentovali: *„To by se našemu trenérovi nelíbilo, na závodech by asi nevyhrála. To by se mi líbilo půlku týdne ležet a pak si to natáhnout, to neplatí!“*

Pro znázornění hodnot z tabulky není příliš vhodné využít spojnicový diagram, neboť může dojít k mylné představě, že hodnoty uběhnutých kilometrů se měnily plynule. Z vhodných typů diagramů uvádíme prostorový válcový diagram.





Poznámka:
Rozdíl mezi aritmetickým průměrem a mediánem je ještě patrnější na výčtu mezd zaměstnanců fiktivní firmy.

Počet zaměstnanců	Mzda v Kč	Pracovní zařazení
30	10 000	dělník
6	25 000	mistr
3	40 000	náměstek
1	100 000	ředitel

Aritmetický průměr: 16 750 Kč (670 000 : 40 = 16 750)
Medián: 10 000 Kč.
Následná interpretace zjištěných údajů: *Extrémní hodnoty platů manažerů firmy výrazně ovlivnily hodnotu aritmetického průměru.* Lze diskutovat se žáky, zda medián svou polohou „uprostřed" naměřených hodnot lépe vystihuje platové podmínky ve firmě.

Očekávané výstupy	M-9-2-01 Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data M-9-2-02 Žák porovnává soubory dat

Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	excelentní

V následujícím přehledu jsou uvedeny osobní údaje jedenácti útočníků hokejového klubu.

ČÍSLO	JMÉNO	VĚK	VÝŠKA	VÁHA
27	Antonín Novák	24 let	180 cm	89 kg
11	Martin Dvořák	25 let	195 cm	99 kg
25	Pavel Novotný	22 let	185 cm	82 kg
18	Josef Pokorný	37 let	178 cm	88 kg
12	Tomáš Novák	33 let	185 cm	103 kg
55	Patrik Konečný	30 let	182 cm	85 kg
84	Jakub Klíma	28 let	189 cm	96 kg
86	Tomáš Zajíc	26 let	175 cm	82 kg
69	Jan Petr	28 let	190 cm	102 kg
14	David Postránecký	23 let	191 cm	96 kg
13	Jakub Suchý	22 let	193 cm	98 kg
47	Aleš Nováček	30 let	196 cm	103 kg

A)

a) Zapiš do tabulky počty hokejistů v jednotlivých hmotnostních kategoriích.

b) Ve které hmotnostní kategorii je v tabulce nejvíce hokejistů?

70 kg – 79 kg	80 kg – 89 kg	90 kg – 99 kg	100 kg a více

B)

a) Vypočítej průměrnou výšku čtyř nejvyšších útočníků hokejového klubu (zaokrouhli na cm).

b) Porovnej výšku a hmotnost útočníků číslo 27 a 25 a zamysli se nad vztahem mezi těmito hodnotami. Najdeš v tabulce ještě jinou podobnou dvojici hráčů?

Možná řešení s metodickým komentářem

A)

a) Žáci rozdělují hokejisty podle jejich hmotnosti do čtyř připravených hmotnostních kategorií.

70 kg-79 kg	80 kg-89 kg	90 kg-99 kg	100 kg a více
0	**5**	**4**	**3**

b) Nejvíce hokejistů je ve hmotnostní kategorii 80 kg-89 kg.

B)

a) Uspořádání útočníků podle velikosti:
175, 178, 180, 182, 185, 185, 189, 190, **191, 193, 195, 196**
Součet čtyř nejvyšších je 775, zaokrouhlený aritmetický průměr je 194 cm (775 : 4 = 193,75)

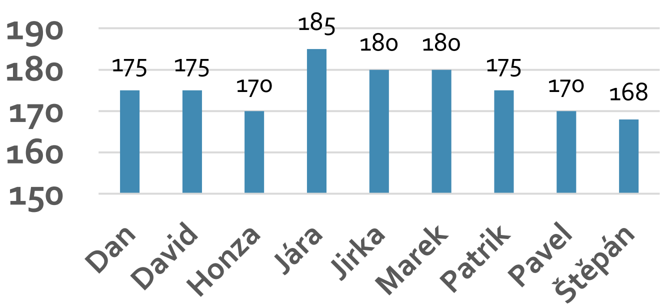
b) Porovnání výšky a hmotnost útočníků číslo 27 a 25:

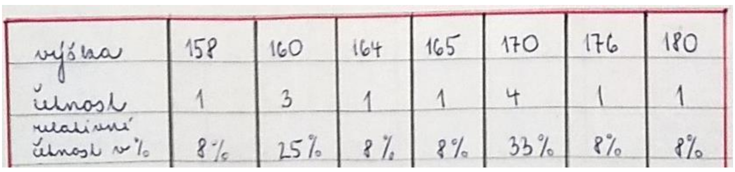
27	Antonín Novák	24 let	180 cm	89 kg
25	Pavel Novotný	22 let	185 cm	82 kg

Hráč číslo 25 je vyšší než hráč číslo 27, váží však méně (což většinou nebývá obvyklé).
Podobnou dvojici tvoří s hráčem číslo 27 i hráč číslo 55.

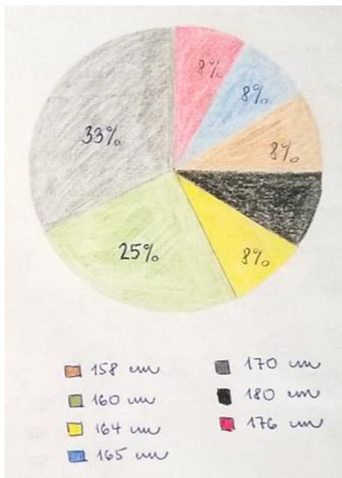
55	Patrik Konečný	30 let	182 cm	85 kg
27	Antonín Novák	24 let	180 cm	89 kg

Poznámka: Na úlohu může navázat jednoduché statistické šetření ve třídě – zjišťování výšek dívek a chlapců. Ukázky žákovských řešení:





výška	158	160	164	165	170	176	180
četnost	1	3	1	1	4	1	1
relativní četnost v %	8 %	25 %	8 %	8 %	33 %	8 %	8 %



Očekávané výstupy	M-9-2-01 Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data M-9-2-02 Žák porovnává soubory dat

Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

a) V následující tabulce doplň chybějící údaje.
b) Sestav pomocí počítače prstencový diagram, který by zachytil rozložení vzdělání zaměstnanců (podíly zaměstnanců v % celkem).
c) Jaký diagram zvolíš pro porovnání průměrné mzdy mužů a žen? Svou volbu zdůvodni.
d) Porovnej průměrné mzdy mužů a žen. Platí následující tvrzení?

Muži mají průměrné mzdy vyšší než ženy.	ANO	NE
Rozdíl průměrných mezd mužů a žen se s vyšším vzděláním zvětšuje.	ANO	NE

Struktura mezd zaměstnanců v roce 2012

VZDĚLÁNÍ ZAMĚSTNANCE	**Podíly zaměstnanců v %** ***Percentage of employees (%)***			**Průměrná mzda** v Kč ***Average earnings*** *(CZK)*			
	celkem	muži	ženy	celkem	%	muži	ženy
Celkem	**100,0**	**55,4**	**44,6**	**26 133**	**100,0**	**28 916**	**22 683**
Základní a nedokončené	5,9	2,8	3,1	16 909	64,7	18 787	15 219
Střední bez maturity	35,4		12,1	19 949		21 914	16 165
Střední s maturitou	35,5	16,8		25 941		28 892	23 278
Vyšší odborné a bakalářské	3,5	1,5		30 517		35 427	26 885
Vysokoškolské	16,1	9,1			166,2	49 976	34 915
Neuvedeno	3,6		1,7		85,1	23 781	20 595

Zdroj: Český statistický úřad – A4 Podíly zaměstnanců, placený čas a hrubé měsíční mzdy podle věku a pohlaví
http://www.czso.cz/csu/2013edicniplan.nsf/p/3109-13

Možná řešení s metodickým komentářem

a) Bez pochopení číselných údajů v tabulce a jejich souvislostí, nemohou žáci daný úkol splnit.
Doplnění podílů zaměstnanců je snazší, stačí si uvědomit, že součet čísel uvedených v jednom řádku ve sloupcích *muži* a *ženy* se musí rovnat údaji ve sloupci *celkem* (ve stejném řádku).
Pro doplnění průměrné mzdy musí žáci zvládnout výpočty s procenty. Musí si uvědomit, že základ, ke kterému se procenta a procentové části v jednotlivých řádcích vztahují, je pro oba výpočty 26 133. První tři údaje, které je třeba v této části tabulky doplnit, představují počet procent, druhé dva údaje procentovou část.

Vzhledem k tomu, že úloha je excelentní úrovně, lze ji využít i pro počítačové zpracování statistických údajů (např. v programu Excel). Žáky seznámíme se zápisem vzorců určených ke kopírování, s relativní adresací buňky (výpočet podílu zaměstnanosti), absolutní adresací buňky (výpočet průměrné mzdy) a s funkcí zaokrouhlit.

D5 =+B5-C5

	A	B	C	D
1	**VZDĚLÁNÍ ZAMĚSTNANCE**	celkem	muži	ženy
2		**100**	**55,4**	**44,6**
3	Základní a nedokončené	5,9	2,8	3,1
4	Střední bez maturity	35,4	23,3	12,1
5	Střední s maturitou	35,5	16,8	18,7

C4 =ZAOKROUHLIT(+B4*100/B2;1)

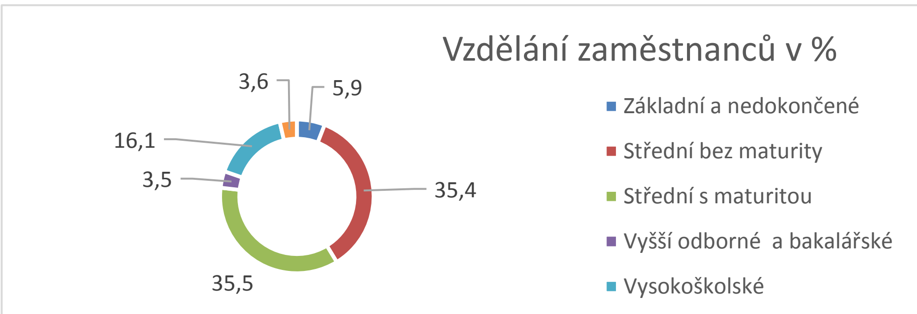
	A	B	C	D	E
1	**VZDĚLÁNÍ ZAMĚSTNANCE**	celkem	%	muži	ženy
2		**26 133**	**100**	**28 916**	**22 683**
3	Základní a nedokončené	16 909	64,7	18 787	15 219
4	Střední bez maturity	19 949	76,3	21 914	16 165
5	Střední s maturitou	25 941	99,3	28 892	23 278

Doplněná tabulka:

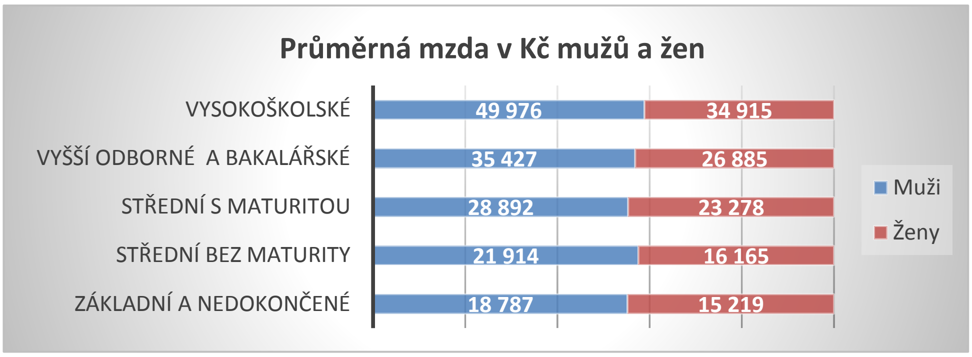
VZDĚLÁNÍ ZAMĚSTNANCE	**Podíly zaměstnanců v %** *Percentage of employees (%)*			**Průměrná mzda** v Kč ***Average earnings*** *(CZK)*			
	celkem	muži	ženy	celkem	%	muži	ženy
Celkem	**100,0**	**55,4**	**44,6**	**26 133**	**100,0**	**28 916**	**22 683**
Základní a nedokončené	5,9	2,8	3,1	16 909	64,7	18 787	15 219
Střední bez maturity	35,4	23,3	12,1	19 949	76,3	21 914	16 165
Střední s maturitou	35,5	16,8	18,7	25 941	99,3	28 892	23 278
Vyšší odborné a bakalářské	3,5	1,5	2,0	30 517	116,8	35 427	26 885
Vysokoškolské	16,1	9,1	7,0	43 407	166,2	49 976	34 915
Neuvedeno	3,6	1,9	1,7	22 239	85,1	23 781	20 595

Poznámka:
Je možné, že některý žák po seznámení s tabulkou zjistí zdánlivé „nesrovnalosti“ v části *Průměrná mzda* v Kč. Celkový průměr 26 133 není aritmetickým průměrem hodnot uvedených ve sloupci pod touto hodnotou, průměrná mzda u vysokoškolsky vzdělaných lidí není průměrem mezd mužů a žen s tímto vzděláním atd. Aritmetické průměry v tabulce závisí na počtech mužů a žen, vysokoškoláků a vysokoškolaček apod.
Žákům to můžeme vysvětlit na jednoduchém případu házení kostkou. Víme-li například, že při pěti hodech padla vždy trojka nebo pětka, není aritmetickým průměrem všech hodů číslo čtyři. Záleží na tom, kolikrát která hodnota padla. Pokud padla například čtyřikrát trojka a jednou pětka, je aritmetickým průměrem hodnota 3,4 ($4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 17$, $17 : 5 = 3{,}4$), pokud padla jednou trojka a čtyřikrát pětka, je aritmetický průměr 4,6.

b) Při zpracování dat vedeme žáky k využití počítače. Tabulkové procesory nám nabízí velkou škálu diagramů (někdy ne příliš vhodně označovaných jako graf), ze které byl zvolen *diagram prstencový*.



c) Při volbě diagramu pro porovnání průměrné mzdy mužů a žen ponecháme žákům dostatečnou volnost, svou volbu by žáci měli umět zdůvodnit. Většinou si pro porovnání volí sloupcové nebo pruhové diagramy, ve kterých „dobře vidí“ zda mají (na stejném stupni dosaženého vzdělání) větší průměrné mzdy muži nebo ženy. Je však třeba žáky seznámit i s diagramy, které jsou „oblíbené“ např. v médiích. Ukázkou může být tzv. *100% skládaný diagram*:



d)

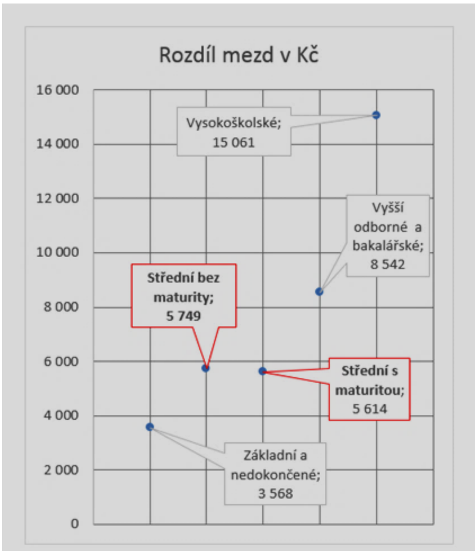
K ověření správnosti tvrzení, že muži mají průměrné mzdy vyšší než ženy, můžeme využít předchozí diagram.

K rozhodnutí, zda platí, že se rozdíl průměrných mezd mužů a žen s vyšším vzděláním zvětšuje, je vhodné vypočítat tyto rozdíly a doplnit je do tabulky. Rozdíly mezd u středního vzdělání bez maturity a s maturitou se liší jen velmi málo a z grafu tato skutečnost nemusí být patrná.

	Muži	Ženy	Rozdíl mezd (muži – ženy)
Základní a nedokončené	18 787	15 219	3 568
Střední bez maturity	21 914	16 165	5 749
Střední s maturitou	28 892	23 278	5 614
Vyšší odborné a bakalářské	35 427	26 885	8 542
Vysokoškolské	49 976	34 915	15 061

Z tabulky můžeme již udělat závěr, že rozdíl průměrných mezd mužů a žen se s vyšším vzděláním nezvětšuje.

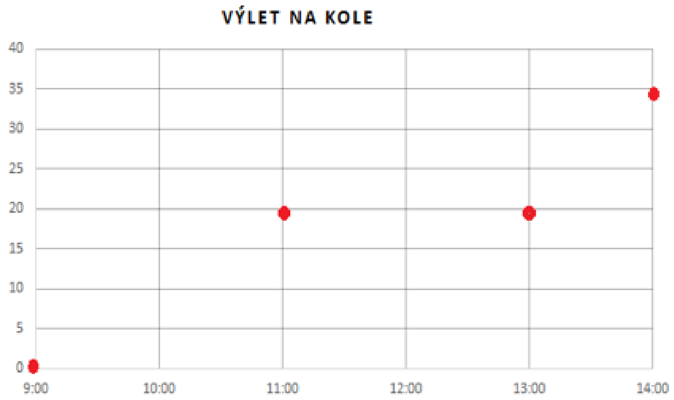
Poznámka:
Využijme takto připravené tabulky a žákům předložme další v médiích užívaný diagram (tzv. *XY bodový diagram*).



Očekávané výstupy	M-9-2-01 Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data M-9-2-02 Žák porovnává soubory dat

Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Karel si vyjel na kole na výlet. Během jízdy si udělal jen jednu delší přestávku. Na začátku přestávky si na tachometru zjistil počet ujetých km a čas, který na cestu potřeboval. Po příjezdu domů opět na tachometru zjistil počet ujetých km a odpovídající čas. Na facebooku zveřejnil nejen fotografie z výletu, ale také následující graf.

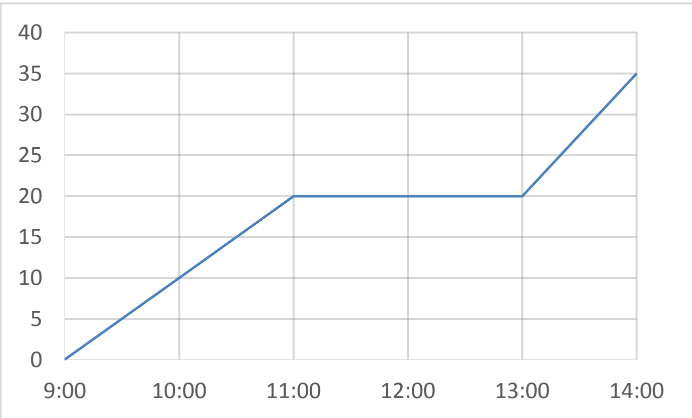


A)

a) Kolik kilometrů Karel ujel od začátku jízdy do 11 hodin?
b) V kolik hodin přerušil jízdu a na jak dlouho?
c) Kolik kilometrů ujel celkem?

B)

Karel body ve zveřejněném grafu spojil úsečkami.



a) Jakou rychlost by ukazoval Karlův tachometr během takto popsané jízdy v jednotlivých úsecích?
b) Zapiš funkční předpisy závislosti ujetých km na čase v jednotlivých úsecích výletu.
c) Jaká byla průměrná rychlost za celou dobu výletu?
d) Jaká by byla průměrná rychlost, kdyby v jednotlivých úsecích jel Karel stejně rychle, ale přestávku měl jen jednu hodinu?

C)

Ve skutečnosti neprobíhala Karlova jízda podle výše uvedeného spojnicového grafu.

a) Popiš pomocí nového grafu jiný možný průběh jízdy Karla (při zachování původních zjištěných údajů). Jak mohl probíhat Karlův výlet?
b) Vymysli „příběh“, který by odpovídal prvním úseku v tomto grafu.

Možná řešení s metodickým komentářem

Vedeme žáky k pochopení pojmu závislost na příkladu, který má reálný kontext. Vedeme žáky k dovednosti orientovat se v časové ose (osa x) a správně přiřazovat k jednotlivým časům ujetou dráhu (osa y). Je nutné u žáků zpřesňovat představy o pojmu průměrná rychlost, průběh funkce, vlastnosti funkce (např. ze znalosti průměrné rychlosti v některém z úseků nelze odvodit rychlost, kterou měl Karel v konkrétním okamžiku).

Řešení:

A)

a) Karel ujel 20 km.
b) Jízdu přerušil v 11 hodin na dvě hodiny.
c) Karel ujel celkem 35 km.

B)

a) Od 9:00 do 11:00 by Karlův tachometr ukazoval 10 km/h, od 11:00 do 13:00 0 km/h, od 13:00 do 14:00 15 km/h.
b) Funkční předpisy závislosti ujetých km na čase v jednotlivých úsecích výletu:

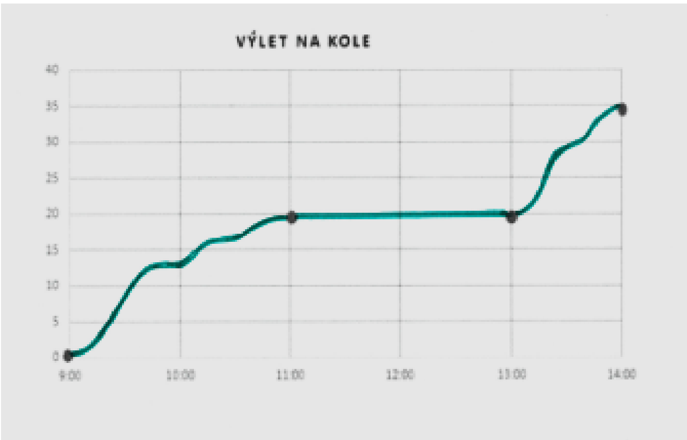
Od 9:00 do 11:00	$s = 10\,t$
Od 11:00 do 13:00	$s = 0\,t$
Od 13:00 do 14:00	$s = 15\,t$

c) Průměrná rychlost za celou dobu výletu je 7 km/h.
d) Kdyby v jednotlivých úsecích jel Karel stejně rychle, ale přestávku měl jen jednu hodinu, byla by průměrná rychlost 8,75 km/h.

C)

Ve skutečnosti neprobíhala Karlova jízda podle výše uvedeného spojnicového grafu. Karel jistě nejel celý první úsek konstantní rychlostí (do kopce jel pomaleji, z kopce rychleji, před závorami musel zastavit, po rovině konstantní rychlost chvíli udržel apod.). Za správné řešení je třeba považovat graf libovolné neklesající funkce, který prochází vyznačenými body na Karlově grafu z facebooku.

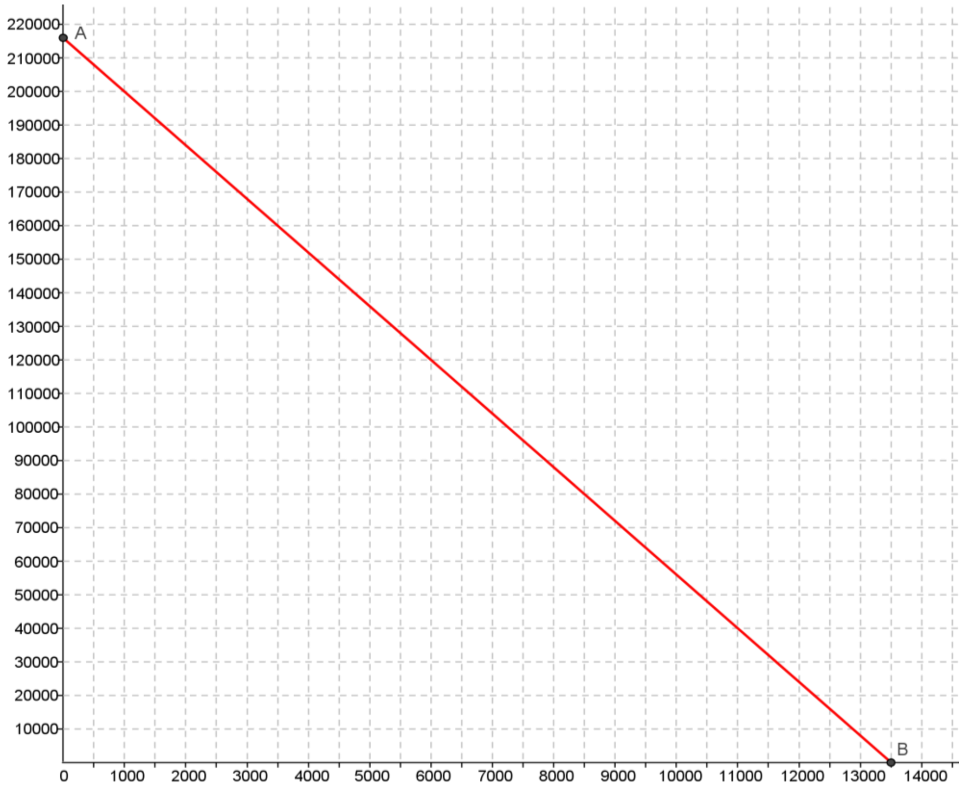
Ukázka možného správného žákovského řešení:



Očekávané výstupy	M-9-2-04 Žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem M-9-2-05 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

Ilustrativní úloha 5	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Letadlo Boeing 747-400 je dopravní letadlo, které je určeno pro dálkové lety. Říká se mu Jumbo. Má dvě patra, v nichž je 416–524 pohodlných sedadel. Létá zpravidla ve výšce 10 000 metrů průměrnou rychlostí 900 km/h. Objem jeho palivových nádrží je 216 000 litrů.
Následující graf znázorňuje závislost množství paliva v nádrži (v litrech) na počtu kilometrů, které letadlo uletělo.



A)
Zapiš souřadnice průsečíků grafu s osou *x* a osou *y*. Popiš jejich význam vzhledem k dané reálné situaci.

B)
Vypočti průměrnou spotřebu paliva na 100 km. Z grafu zjisti, kolik paliva zbývá v nádrži letadla, jestliže uletělo 3 500 km, 8 500 km? Zkontroluj výpočtem.

C)
Zapiš rovnici funkční závislosti množství paliva v nádrži na počtu kilometrů, které letadlo uletělo. Vypočítej, jak dlouho může letadlo letět průměrnou rychlostí bez mezipřistání.

Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci mají prokázat schopnost zjišťovat potřebné údaje z grafu a porovnávat tyto údaje s údaji uvedenými v zadání úlohy. Doporučujeme připravit pro žáky graf na interaktivní tabuli a správná řešení zkontrolovat, vysvětlit a ukázat si pomocí dynamického programu (např. GeoGebra). S pomocí tabulkového procesoru, který je součástí programu, můžeme volně měnit seznamy bodů, které chceme vykreslovat v grafickém okně, a vhodně tak upravovat zadání úlohy.

Řešení:

A)

A[0; 216 000], B[13 500; 0]

Při určování souřadnic bodů A a B někteří žáci chybují v pořadí souřadnic, jiní nulovou souřadnici úplně vynechají. Je potřeba, aby si žáci uvědomili, na které z os body A a B leží.

B)

a) Pro výpočet spotřeby paliva žáci používali různé způsoby řešení. Nejčastěji využili poměr nebo trojčlenku (viz následující žákovská řešení).

l : km

216 000 : 13 500 = 16 l / km

Spotřeba na 100 km - 16 · 100 = 1 600 l

Průměrná spotřeba na 100 km je 1 600 l paliva.

13 500 km ...... 216 000 l

900 km ...... x l

$$\frac{x}{216\,000} = \frac{900}{13\,500}$$

$$x = \frac{900}{\cancel{13\,500}_{1}} \cdot \frac{\cancel{216\,000}^{16}}{1}$$

x = 14 400 l / 900 km

14 400 : 9 = 1600

Průměrná spotřeba paliva na 100 km je 1600 l.

b) Žáci zjišťují požadované údaje přímo z grafu (C[3 500; 160 000], D[8 500; 80 000]) a výpočtem (viz žákovské řešení).

C[3 500; 160 000] D[8 500; 80 000]

216 000 - 3 500 · 16 = 160 000 l

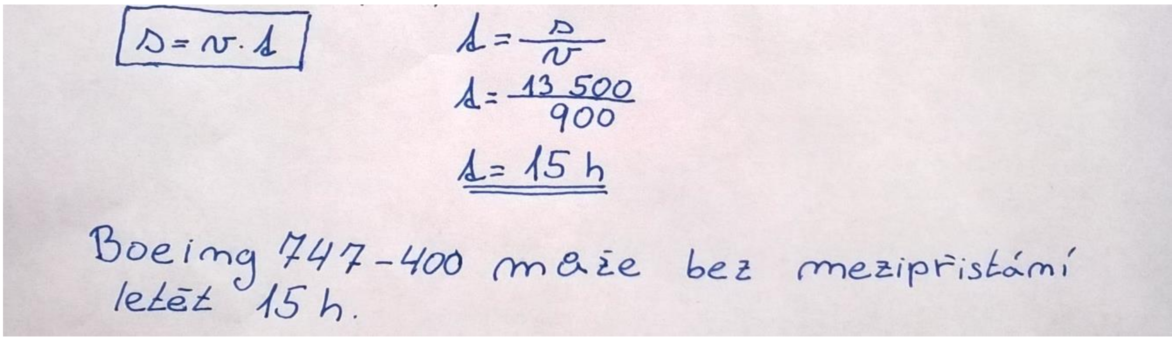
216 000 - 8 500 · 16 = 80 000 l

Po 3 500 km letu zbývá letadlu v nádrži 160 000 l paliva, po 8 500 km letu zbývá 80 000 l.

C)

a) Zapsat rovnici funkční závislosti bývá pro žáky často velmi obtížné, přestože předchozí úkol má navést žáky k tomu, že musí od maximálního množství paliva v nádrži odčítat spotřebované palivo podle počtu kilometrů, které už letadlo uletělo. Jedná se tedy o lineární funkci y = 216 000 – 16x.

b) K výpočtu doby letu bez mezipřistání (jestliže je známa dráha a rychlost letadla) žáci použijí vztah pro výpočet dráhy nebo rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu, ze kterého následně vyjádří neznámou t (viz žákovské řešení).



$$\boxed{D = v \cdot t}$$

$$t = \frac{D}{v}$$

$$t = \frac{13\,500}{900}$$

$$\underline{\underline{t = 15\ \mathrm{h}}}$$

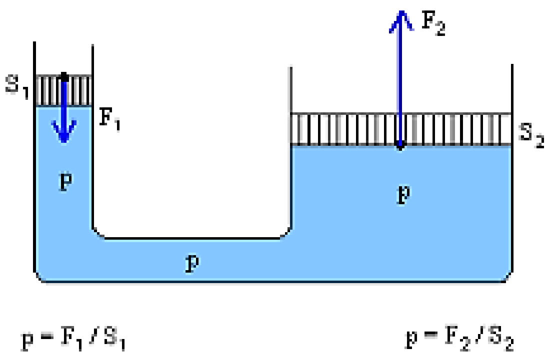
Boeing 747-400 může bez mezipřistámí letět 15 h.

Očekávané výstupy	M-9-2-04 Žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem M-9-2-05 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Významný fyzikální zákon říká, že tlak vyvolaný vnější silou, která působí na kapalné těleso v uzavřené nádobě, je ve všech místech kapaliny stejný. Z toho vyplývá, že pokud v uzavřené nádobě s kapalinou zvýšíme tlak, zvětší se tlak ve všech místech této nádoby stejně. Této skutečnosti se v praxi využívá u hydraulických zařízení.

Hlavní částí hydraulického zařízení jsou dvě válcové nádoby nestejného průřezu u dna spojené trubicí. Oba válce i spojovací trubice jsou naplněny kapalinou, která je uzavřena pohyblivými písty. Působíme-li na menší píst o obsahu průřezu S_1 tlakovou silou F_1, vyvolá tato síla v kapalině tlak $p = F_1 / S_1$, který je ve všech místech kapaliny stejný (tedy i ve válci s širším pístem). Na širší píst o obsahu průřezu S_2 působí tedy kapalina tlakovou silou F_2 o velikosti



$F_2 = p \cdot S_2 = (F_1 / S_1) \cdot S_2$.

Odtud dostaneme po úpravě vztah: $F_2 / F_1 = S_2 / S_1$ (tzv. Pascalův zákon).

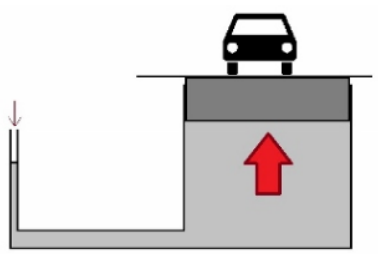
A)

Formuluj Pascalův zákon slovy.

B)

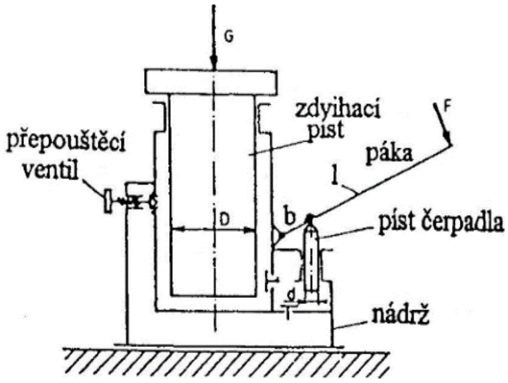
a) Je v daném hydraulickém zařízení síla F_2 přímo úměrná síle F_1?

b) Urči, jak velkou silou by bylo nutné působit na první píst hydraulického zařízení, abychom zvedli automobil o hmotnosti 1 800 kg, jestliže by druhý píst měl desetkrát, patnáctkrát, dvacetkrát, třicetkrát větší plochu než píst první? Zapiš tyto údaje do tabulky vyjadřující závislost vynaložené síly na poměru velikostí ploch hydraulického zvedáku.



C)

Urči, jak velkou silou musí řidič působit na hydraulický zvedák (panenku), aby mohl opravit kolo osobního automobilu, jehož hmotnost nepřesáhne dvě tuny, jestliže průměr malého pístu zvedáku je ……. cm a poloměr většího pístu je …… cm.



Jak se liší rozměry tohoto typu hydraulických zvedáků pro využití u aut s hmotností pět, osm a dvanáct tun za předpokladu, že průměr malého pístu je pro všechny hmotnosti aut stejný?

Možná řešení s metodickým komentářem

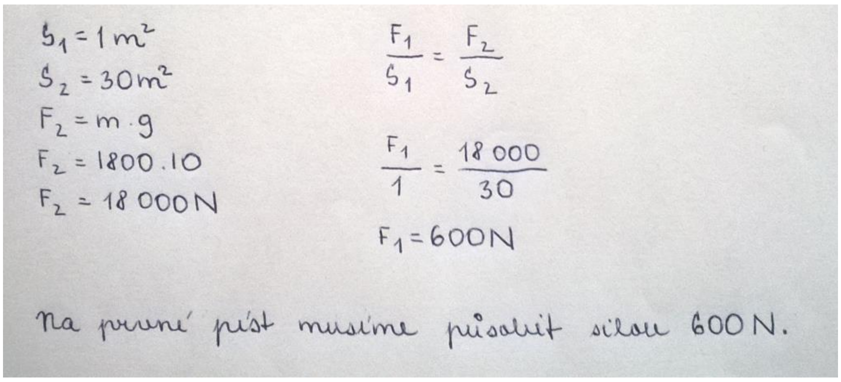
A)

Vztah F_2 / F_1 = S_2 / S_1, kde S_1, S_2 jsou plochy prvního a druhého pístu (v m^2) a F_1, F_2 síly, které působí na první resp. na druhý píst (v N) lze slovy formulovat takto:

Velikosti sil působících na písty jsou ve stejném poměru jako obsahy průřezů odpovídajících pístů. To znamená, že na širší píst působí kapalina **tolikrát větší silou**, než je síla působící na užší píst, **kolikrát je obsah průřezu širšího pístu větší**, než je obsah průřezu pístu užšího.
Síla působící na širší píst může být tedy mnohonásobně větší než síla působící na užší píst.

B)

a) V daném hydraulickém zařízení je síla F_2 přímo úměrná síle F_1.
b) Žáci dosazením do vzorce pomocí trojčlenky nebo vztahu pro nepřímou úměrnost vypočítají pro různé velikosti plochy S_2 hledanou sílu F_1 (viz žákovská řešení). Důležité je, aby bylo žákům zřejmé, že poměr velikostí ploch např. 30 m^2 a 1 m^2 je shodný i u jiných velikostí ploch např. 60 m^2 a 2 m^2, 150 m^2 a 5 m^2 (poměr krátíme na základní tvar).



$S_1 = 1\,m^2$

$S_2 = 30\,m^2$

$F_2 = m \cdot g$

$F_2 = 1800 \cdot 10$

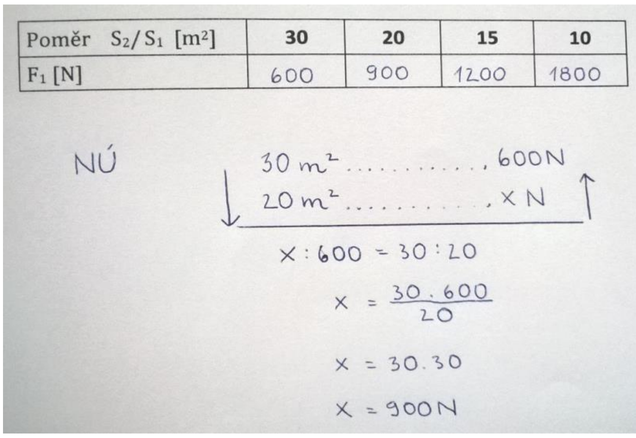
$F_2 = 18\,000\,N$

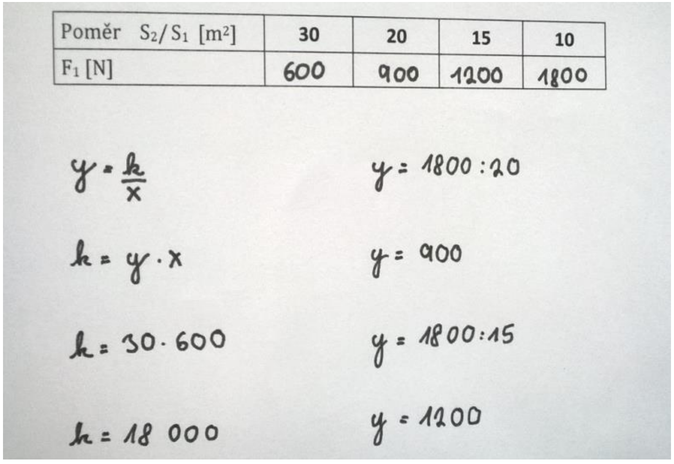
$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$

$\frac{F_1}{1} = \frac{18\,000}{30}$

$F_1 = 600\,N$

Na první píst musíme působit silou 600 N.





C)

Badatelsky orientovaná úloha pro excelentní žáky je z fyzikálního hlediska obtížná, a proto doporučujeme, aby ji žáci řešili společně s učitelem fyziky (je třeba zjistit rozměry jednotlivých pístů, pochopit schéma zařízení, vysvětlit roli přídavné páky apod.).

Očekávané výstupy	M-9-2-03 Žák určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti M-9-2-05 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Ceny za jednu kWh elektřiny a měsíční poplatky se u různých dodavatelů liší. Distributor A má sazbu 4,40 Kč za 1 kWh a měsíční poplatky za dodávku a jistič 160 Kč, u distributora B je sazba 4,20 Kč za 1 kWh a měsíční poplatek (tzv. paušál) 180 Kč.

a) Porovnej, od kterého dodavatele bude výhodnější elektřinu odebírat, při spotřebě 1 000, 2 000, 3 000 a 4 000 kWh.

b) Pro jakou měsíční a roční spotřebu by byla platba za elektřinu u obou dodavatelů stejná?

Možná řešení s metodickým komentářem

Text zadané reálné úlohy s aktuálním tématem je poměrně obsáhlý, s velkým množstvím různých údajů, kterým musí žáci dobře porozumět a zorientovat se v nich. Teprve potom mohou úlohu správně vyřešit. Úloha tedy mimo jiné předpokládá i velmi dobrou úroveň čtenářské gramotnosti.

Řešení:
a) Je potřeba, aby žáci dokázali vyjádřit rovnice, které určují funkční vztahy pro výpočet plateb pro oba dodavatele.

Dodavatel A:
měsíční platba $y_A = 4{,}40x + 160$; roční platba $y_A = 4{,}40x + 12 \cdot 160$;

- pro spotřebu 1 000 kWh za rok: $y_A = 4{,}40 \cdot 1\,000 + 12 \cdot 160 \rightarrow y_A = 6\,320$ Kč;
- pro spotřebu 2 000 kWh za rok: $y_A = 4{,}40 \cdot 2\,000 + 12 \cdot 160 \rightarrow y_A = 10\,720$ Kč;
- pro spotřebu 3 000 kWh za rok: $y_A = 4{,}40 \cdot 3\,000 + 12 \cdot 160 \rightarrow y_A = 15\,120$ Kč;
- pro spotřebu 4 000 kWh za rok: $y_A = 4{,}40 \cdot 4\,000 + 12 \cdot 160 \rightarrow y_A = 19\,520$ Kč

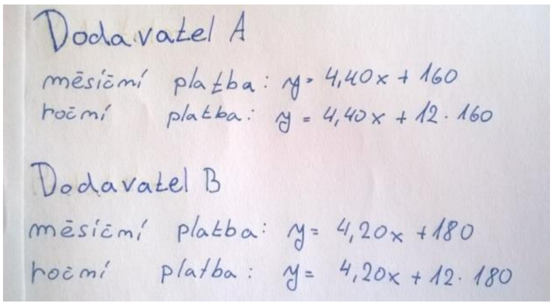
Dodavatel B:
měsíční platba $y_B = 4{,}20x + 180$; roční platba $y_B = 4{,}20x + 12 \cdot 180$;

- pro spotřebu 1 000 kWh za rok: $y_B = 4{,}20 \cdot 1\,000 + 12 \cdot 180 \rightarrow y_B = 6\,360$ Kč
- pro spotřebu 2 000 kWh za rok: $y_B = 4{,}20 \cdot 2\,000 + 12 \cdot 180 \rightarrow y_B = 10\,560$ Kč
- pro spotřebu 3 000 kWh za rok: $y_B = 4{,}20 \cdot 3\,000 + 12 \cdot 180 \rightarrow y_B = 14\,760$ Kč
- pro spotřebu 4 000 kWh za rok: $y_B = 4{,}20 \cdot 4\,000 + 12 \cdot 180 \rightarrow y_B = 18\,960$ Kč

Při spotřebě 1 000 kWh za rok je výhodnější dodavatel A, v ostatních případech dodavatel B.

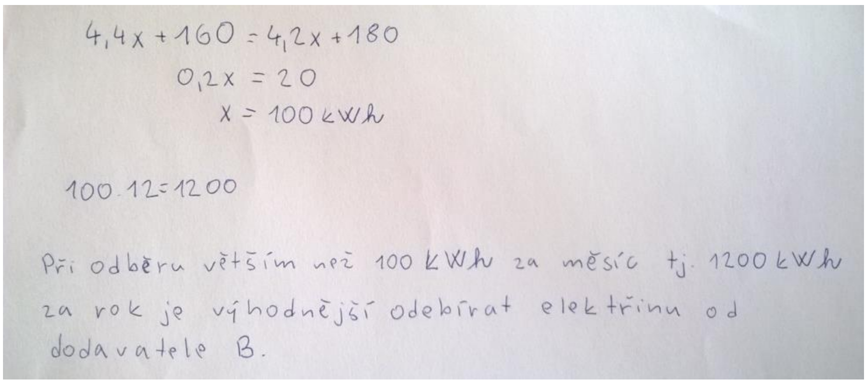
Úlohu lze řešit i graficky.

b) Rovnost měsíčních a ročních plateb (viz žákovské řešení):



Dodavatel A
měsíční platba: $y = 4{,}40x + 160$
roční platba: $y = 4{,}40x + 12 \cdot 160$

Dodavatel B
měsíční platba: $y = 4{,}20x + 180$
roční platba: $y = 4{,}20x + 12 \cdot 180$



$4{,}4x + 160 = 4{,}2x + 180$
$0{,}2x = 20$
$x = 100$ kWh

$100 \cdot 12 = 1200$

Při odběru větším než 100 kWh za měsíc tj. 1200 kWh za rok je výhodnější odebírat elektřinu od dodavatele B.

Očekávaný výstup	M-9-2-05 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

4. Tematický okruh Geometrie v rovině a prostoru

Marie Kupčáková

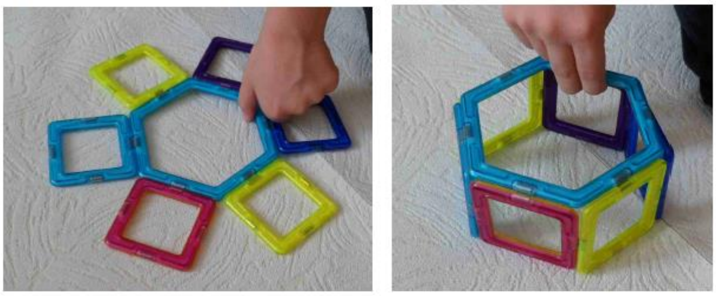
RVP ZV: *V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.*

V poslední čtvrtině 20. století se prosadil mylný názor, že lze „vhodně a věku přiměřeně“ budovat axiomatický systém planimetrie od mladšího školního věku. Už od 2. třídy byly zaváděny abstraktní pojmy, nepřiměřené symboly, zápisy, odborná terminologie atd. Tato koncepce se však prokázala jako nevhodná a neúčinná.

V současnosti se obsah školní geometrie zbavil formálních direktiv a škola ponechává žákům daleko více prostoru pro přirozený rozvoj prostorové představivosti, pro imaginaci a kreativitu, netlumí jejich zvídavost. Geometrie se po desetiletích opět opírá o objekty a zkušenosti z konkrétního, nikoliv vymyšleného, světa.

Na základní školu žák přichází s geometrickými představami, které většinou získal právě v konkrétním reálném světě. Během vzdělávání na základní škole by pak měl získat další základní geometrické znalosti, dovednosti a návyky.

Manipulativní činnosti, úzce spojené právě s reálným světem, mají za cíl přivést žáka k objevování vlastností objektů geometrického světa a vztahy mezi nimi. Zvláště patrné je to u prostorové geometrie, která už ze své podstaty musí vycházet z konkrétních činností. Do geometrie všech stupňů patří následující pomůcky: modelína (vhodná je JOVI), špejle (párátka), papír, nůžky, lepidlo, didakticky vhodné stavebnice, případně i provázek pro učivo o čarách, délkách, obvodech. Úlohy jsou pak s věkem žáků problémově odstupňovány.



Uveďme v této souvislosti některé náměty společné pro oba stupně školního vzdělávání:

- Žák modeluje prostorové tvary (od nejjednodušších oblých těles na 1. stupni, po komolé jehlany na 2. stupni).
- Žák dochází pomocí modelíny k poznání, že týž objem mohou mít různá tělesa (modeluje řadu: koule → různé válce → různé kužele → různé hranoly ...).
- Pomocí „destičkových“ stavebnic (např. *Magformers*) žák objevuje a zdůvodňuje, proč různé mnohostěny mohou mít sice týž povrch, ale různý tvar a objem.
- Učitel by měl žákům nabídnout konkrétní modely krychlových těles, která bývají často zařazována do mezinárodních srovnávacích testů. V našich školách je často žákům předkládán jako jediný reálný model pouze obrázek nakreslený v rovnoběžném zobrazení.
- Žákovi musí být dána možnost kreslit jednoduché obrazy těles od ruky tak, aby byl pro něj obrázek srozumitelný. K přesnější konstrukci rovnoběžných průmětů těles dojde postupně časem.

- V náčrtcích a konstrukcích obrazů těles se nemusíme vázat pouze na volné rovnoběžné promítání (v ČSN EN ISO 5456-3 označené jako *kabinetní axonometrie*). Pro žáky je příjemnější a snazší použít metodu zvanou *normální planometrie* (ČSN EN ISO 5456-3, odst. 5.3.3), dříve označovanou jako vojenská axonometrie či vojenská perspektiva, která zachovává tvar podstav. (Planometrie je axonometrické izometrické zobrazení, ve kterém je axonometrická průmětna vodorovná.) Velmi často jsou v tomto zobrazení vyhotoveny názorné plánky měst, ve kterých je nad půdorysem budovy vztyčena její prostorová podoba.
- Už od 1. stupně žáci kreslí pohledy shora (půdorysy), zepředu (nárysy), z boku (bokorysy). Tuto dovednost stále rozvíjíme a upevňujeme, na druhém stupni však pohledy kreslíme na pozicích sdružených průmětů.
- Školní prostorová geometrie často rozvíjí žákovu představivost prostřednictvím úloh o sítích krychle. Je však zapotřebí větší měrou zařazovat i úlohy směřující k identifikaci vazeb mezi stěnami reálné krychle (3D modelu) a čtverci v síti krychle (prostřednictvím obrazu krychle).
- Manipulativní činnosti patří i do planimetrie. Například se shodností a podobností se žák seznamuje užitím reálných modelů, fólií nebo geometrického software. Experimentálně ověřuje vlastnosti shodných zobrazení – posunutí, osové souměrnosti, středové souměrnosti. (Pomocí počítačové grafiky je možno i otáčet rovinné útvary kolem jistého bodu o daný orientovaný úhel.)
- Rozstříháním daného tvaru a přeskupením získaných částí žák objevuje a zdůvodňuje skutečnost, že různé rovinné geometrické útvary mají týž obsah, ale různý obvod (ověřuje jako grafický součet nebo výpočtem). Hodnoty porovnává.
- Žák kreslí rovinné geometrické útvary jednak od ruky, jednak přesně – užitím pravítek, kružítka a úhloměru nebo s užitím digitálních technologií.
- K manipulativním činnostem řadíme i dovednosti v rýsování, které žák získává postupně a systematicky od 11 let věku. Po absolvování 2. stupně by měl ze základních konstrukcí umět narýsovat s pomocí trojúhelníkových pravítek, kružítka, měřítka a úhloměru: přímky, rovnoběžky, kolmice, kolmici bodem k dané přímce, rovnoběžku s danou přímkou daným bodem, různoběžky svírající daný úhel; úsečku, grafický součet a rozdíl úseček, úsečku dané velikosti, osu úsečky, střed úsečky; konvexní úhel (úhel dané velikosti), grafický součet a rozdíl úhlů, osu úhlu; kružnici, kružnici s daným středem a poloměrem, kružnici s daným středem procházející daným bodem, sečnu, tečnu, nesečnu kružnice.
- Žák na konci druhého stupně by tak postupně měl dojít k poznání, že pojmy geometrie tvoří logickou řadu útvarů: bod, čára, plocha, těleso. Bod změřit nelze, u čar měříme jejich délku, u ploch můžeme měřit jejich obsah, u těles jejich objem. Staří Řekové tento poznatek vymezovali následujícími slovy: bod nemá částí, přímka má pouze délku, rovina má délku a šířku, prostor má délku, šířku i výšku.
- Schopnost manipulovat se symboly představuje základ vyšší matematiky, v níž se symboly používají na místě objektů. V geometrii na základní škole by psaní a čtení symbolických zápisů nemělo být tou nejdůležitější záležitostí, přesto je tomu třeba věnovat pozornost. V současné době je, co se týká symboliky, v českých učebních textech nejednota, kterou by mělo napravit vydání nových (a pro všechny typy a stupně škol závazných) názvů a značek školské matematiky.

Geometrie by měla vést žáka k rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti.

První stupeň ZŠ

Přestože *Standardy pro základní vzdělávání* konkretizují očekávané výstupy na konci druhého období prvního stupně ZŠ, zastavme se nejprve u výstupů pro **1. období.** RVP ZV uvádí tři závazné výstupy.

Žák

- rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentace
- porovnává velikosti útvarů, měří a odhaduje délku úsečky
- rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary.

V prvním období tedy žák rozliší, co je prostorový útvar a co rovinný útvar. (Celosvětově se stále častěji používá už od 1. stupně označení 2D a 3D tvary, tedy útvary dimenze 2 a útvary dimenze 3.) Pojem „rovinný útvar“ pro začátek nahrazují slova jako destička, ploška apod. Připomeňme, že útvary dimenze 1 (přímka a její části) nejsou útvary rovinnými a nejsou v 1. období obsaženy v očekávaných výstupech. Učitel dále nemusí trvat na terminologickém rozlišení kružnice a kruhu. Pokud ano, pak pouze v tom smyslu, že kruh je rovinný útvar, ale kružnice je čára (v rovině ležící – křivá). Bude však žádoucí, aby žák vyhledal a pojmenoval čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh, nově také půlkruh a čtvrtkruh (začne používat termíny polovina, čtvrtina) a popsal je vlastními slovy. Ze základních tvarů pak vytváří vzory, manipulací získává potřebné konkrétní zkušenosti s rovinnou geometrií. Rýsovací pomůcky budeme používat raději až v druhém období prvního stupně.

Od 1. období však může učitel bez omezení představovat a správně pojmenovávat základní prostorové útvary, kterými jsou krychle, kvádr, jehlan, koule, válec, kužel. Použije při tom různé metody i formy práce, stále však dbá na to, aby každé dítě mělo možnost dosyta vnímat tělesa zrakem i hmatem, spolu s jejich pojmenováním. Žák tak při kódování geometrické informace využívá jednak vizuální reprezentaci (k vytváření mentálních obrazů), jednak fonologickou reprezentaci (dává informaci zvukovou podobu). Zvláště v mladším školním věku je význam vizuálního kódování velice výrazný. Děti dokáží podržet obraz v paměti i několik minut a „číst“ jeho detaily z fotografické (eidetické) představy.

Žák dokáže stavět z kostek, dokončovat prostorové vzory, porovnávat výšky staveb, pojmenovávat a určovat relativní pozice v prostoru (nahoře, dole, vpravo od, apod.). Žák také rozpoznává tělesa podle jejich 2D reprezentací – nejprve z obrázku (fotografie, kresba), později za pomoci vhodných pomůcek získává prvé zkušenosti se sítěmi těles.

Při porovnávání útvarů co do shodnosti či velikosti věnujeme velkou pozornost manipulativním činnostem. Skutečně přemisťujeme útvary a ptáme se, co je výsledkem. (Nemusíme důsledně opravovat slovo „stejné“ na „shodné“.) Vedeme žáky k předvídání výsledku. Pracujeme s vhodnými modely z reálného světa, měříme délku špejlí, tužek, ukazovátka, cesty apod. Uvážlivě zavádíme různé jednotky měření.

Učivo o geometrických souměrnostech má na prvním stupni vcelku pozitivní psychologický účinek (zřejmě s touto predispozicí už přicházíme na svět). Zařazujeme úlohy na dokončení vzorů podle tvarů, velikostí, barvy. Bez definování pojmů ilustrujeme různými metodami a formami osovou souměrnost, středovou souměrnost, můžeme zařadit i posunutí a u nadaných dětí (podle zahraničních učebních materiálů) i tzv. „rotační symetrii“ (větrníky s lopatkami).

Pro **2. období prvního stupně** je závazných pět výstupů (viz níže).

Také v tomto období preferujeme konkrétní manipulativní činnosti pro objevování vlastností geometrických útvarů. V rovině to budou například manipulace se čtverci, kosočtverci, obdélníky, kosodélníky, lichoběžníky, trojúhelníky, mnohoúhelníky. Žák přijímá fakt, že některé útvary mohou mít více než jeden název, a začne chápat klasifikaci dvojrozměrných útvarů v jejich hierarchii. Vyhledává tvary, kterými lze pokrýt rovinu. Identifikuje a pojmenuje trojúhelník rovnoramenný, rovnostranný a pravoúhlý.

Rovinnou geometrii žákovi přibližuje práce ve čtvercové síti. Tu využije při kreslení (rovnoběžky, kolmice, čtverce, obdélníky), při určování vzdálenosti bodů (ve vodorovném a svislém směru), při určování obvodů a obsahů mnohoúhelníků čtvercové sítě. Znázorňuje v ní souměrné útvary. Od čtvercové sítě pak žák přirozeně přechází k pochopení souřadného systému v rovině.

V souladu s psychologickými poznatky je vhodné začít s rýsováním a konstrukčními úlohami ve věku 11-12 let. Souběžně s rýsováním útvarů pak používáme správné názvosloví a platné značky školské matematiky tak, aby je žák mohl užívat i na dalších stupních škol. Pro nácvik jednoduchých konstrukcí je vhodné vyčlenit časový blok a rýsovat: čáry přímé, různoběžky, kolmice (užitím trojúhelníku s ryskou), rovnoběžky (s užitím dvou pravítek), kružnice, ramena úhlu (polopřímky). Žák by měl zvládnout narýsovat přímou čáru procházející dvěma body, úsečku, úsečku dané délky, kružnici s libovolným středem a poloměrem, osu úsečky.

V samém závěru 2. období zařazujeme úlohy na konstrukci trojúhelníku podle věty *sss*, na které žákům ukazujeme, jak je vhodné postupovat při řešení konstrukční úlohy. Nejprve nakreslit od ruky očekávaný výsledek (zde trojúhelník) a vyznačit v něm vše, co víme. Do náčrtku zakreslujeme vše, co bychom mohli k vyřešení potřebovat, naznačujeme konstrukce. Říkáme, že provádíme rozbor a hledáme řešení. Výsledkem je řada postupných konstrukčních kroků, které říkáme postup konstrukce. Ten zapíšeme (symbolicky nebo slovně). Provedeme pečlivě konstrukci. Nezapomeneme na závěrečné ověření správnosti vyřešení úlohy. (Namísto diskuse.)

Prostorová geometrie navazuje na znalosti z prvního období, opět vychází z konkrétních činností a představ. Žák modeluje tvary z reálného světa pomocí modelíny a špejlí (párátek), modeluje všechna základní geometrická tělesa (viz 1. období). Učí se rozlišovat, co je – co není mnohostěn. Seznamuje se s hranoly a obecnými jehlany. Popisuje vlastnosti těles (počty hran, stěn, vrcholů – Eulerův vztah). Sestavuje prostorové stavby ze základních těles. Vytváří krychlová tělesa podle plánku. Kreslí obrazy těles do tečkovaných sítí. Objevuje sítě dalších těles.

Žákům dáme možnost kreslit od ruky rovinné útvary i obrazy těles, aby nenabyli dojmu, že v geometrii je to zakázáno.

Žák dokáže změřit délku (cm, m), určit obsah útvaru v síti pomocí obsahu čtverců sítě. Na 1. stupni je možno žáky seznámit se základním principem měření úhlů, s velikostí pravého a plného úhlu (s jeho zlomky).

Očekávané výstupy tematického okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* jsou pro 1. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace do níže uvedených konkrétnějších indikátorů (nastavených na minimální úroveň).

Očekávaný výstup	M-5-3-01 Žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnice); užívá jednoduché konstrukce
Indikátory	1. žák rozezná základní rovinné útvary (kruh, čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnice) nezávisle na jejich natočení, velikosti nebo označení 2. žák určí rovinné útvary pomocí počtu vrcholů a stran, rovnoběžnosti a kolmosti stran 3. žák využívá základní pojmy a značky užívané v rovinné geometrii (čáry: křivá, lomená, přímá; bod, úsečka, polopřímka, přímka, průsečík, rovnoběžky, kolmice) 4. žák rozpozná jednoduchá tělesa (krychle, kvádr, válec) a určí na nich základní rovinné útvary 5. žák narýsuje kružnici s daným poloměrem 6. žák narýsuje obecný trojúhelník nebo trojúhelník se třemi zadanými délkami stran 7. žák narýsuje čtverec a obdélník s užitím konstrukce rovnoběžek a kolmic 8. žák dodržuje zásady rýsování
Očekávaný výstup	M-5-3-02 Žák sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran
Indikátory	1. žák rozlišuje obvod a obsah rovinného útvaru 2. žák určí s pomocí čtvercové sítě nebo měřením obvod rovinného útvaru (trojúhelníku, čtyřúhelníku, mnohoúhelníku) 3. žák graficky sčítá, odčítá a porovnává úsečky

	4. žák určí délku lomené čáry graficky i měřením 5. žák převádí jednotky: kilometry na metry, metry na centimetry, centimetry na milimetry
Očekávaný výstup	M-5-3-03 Žák sestrojí rovnoběžky a kolmice
Indikátory	1. žák vyhledá dvojice kolmic a rovnoběžek ve čtvercové síti 2. žák načrtne a narýsuje kolmici a rovnoběžku
Očekávaný výstup	M-5-3-04 Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu
Indikátory	1. žák určí pomocí čtvercové sítě obsah rovinného útvaru, který lze složit ze čtverců a obdélníků 2. žák používá základní jednotky obsahu (cm^2, m^2, km^2) bez vzájemného převádění
Očekávaný výstup	M-5-3-05 Žák rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru
Indikátory	1. žák pozná osově souměrné útvary (i v reálném životě) 2. žák určí překládáním papíru osu souměrnosti útvaru

Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Geometrie v rovině*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi. Ta, která budeme hodnotit jako správná, jsou v červených rámečcích.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

a) Vymodeluj z modelíny kouli, válec, kužel.
b) Připrav si párátka a malé kuličky modelíny.
Sestav obvod čtverce.
Vymodeluj takto celou krychli. Modeluj tělesa uvedená v tabulce a zapisuj, kolik mají vrcholů, hran a stěn.

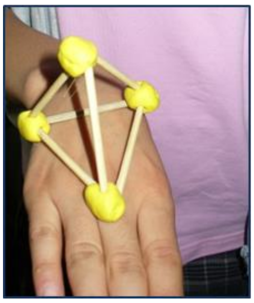
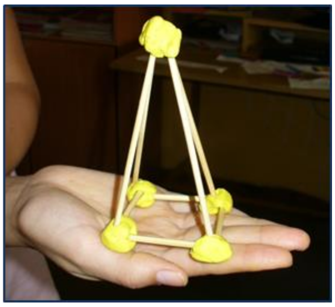
těleso	vrcholy	hrany	stěny
krychle			
kvádr			
trojboký jehlan			
čtyřboký jehlan			
šestiboký hranol			

Možná řešení s metodickým komentářem

a) Žáci se seznamují se základními prostorovými tvary zapojením hmatu (stereognostického smyslu) s použitím modelíny. V praxi se velmi osvědčila modelína JOVI balená v cihličkách (nikoliv v kelímcích – má trochu jiné vlastnosti). Žáci bez problémů modelují kouli a válec, s nápovědou způsobu vymodelování i další oblé těleso – kužel. Hranatá tělesa už jsou problémem, úspěchy se však postupně dostavují.

Učitelé se nemusejí bát seznamovat děti s tělesy, která nejsou v „jejich“ učebnici – může se stát, že v jiné sadě učebnic budou. Věk od 6 do 11 let je ideální k vytváření konkrétních představ těles, hranol lze bez problémů pojmenovat už na prvním stupni.


b) Úlohu, která později vede k objevení Eulerova vztahu mezi počty vrcholů, stěn a hran mnohostěnů, opět řešíme pomocí konkrétních činností. Díky nim se žáci dopouštějí minimálního počtu chyb. Pokud je etapa modelování ignorována (z různých důvodů), je pro žáky vyřešení úkolu velice obtížné.

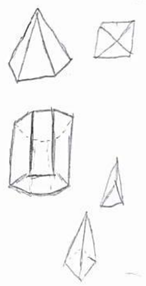



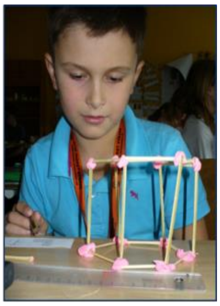
Žáci často považují hlavní vrchol jehlanu za jediný „správný vrchol", jak vidíme z ukázky žákovského řešení:

těleso	vrcholy	hrany	stěny
krychle	0		
kvádr	0	4	2
trojboký jehlan	1	3	3
čtyřboký jehlan	1	4	4
šestiboký hranol	0	12	6

Někdy si žáci pomáhají názornými obrázky, nedovedou však z nich ještě zpětně správně vyčíst informace o vlastnostech prostorových útvarů.

těleso	vrcholy	hrany	stěny
krychle	8	6 8	6
kvádr	8	8	6
trojboký jehlan	5	4	4
čtyřboký jehlan	14		
šestiboký hranol			





těleso	vrcholy	hrany	stěny
krychle	8	12	6
kvádr	8	12	6
trojboký jehlan	4	6	4
čtyřboký jehlan	5	8	5
šestiboký hranol	12	18	8

Očekávaný výstup	M-5-3-01 Žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnice); užívá jednoduché konstrukce

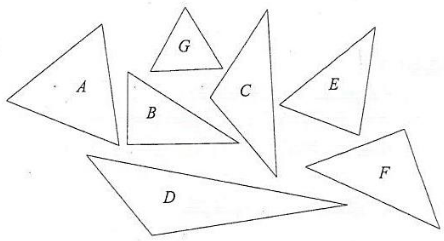
Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Dobře si prohlédni trojúhelníky a rozhodni, které jsou pravoúhlé, které rovnostranné a které rovnoramenné.

pravoúhlé ....

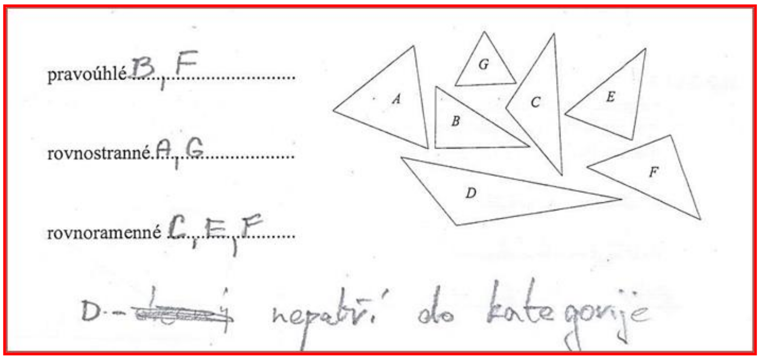
rovnostranné............................

rovnoramenné ....



Možná řešení s metodickým komentářem

S tímto typem úloh se často setkáme v zahraničních učebnicích, v našich méně. Žáci pak „odmítají připustit“, že jeden trojúhelník může mít dva názvy, nebo také to, že pro některý trojúhelník nemáme v úloze připravený název.



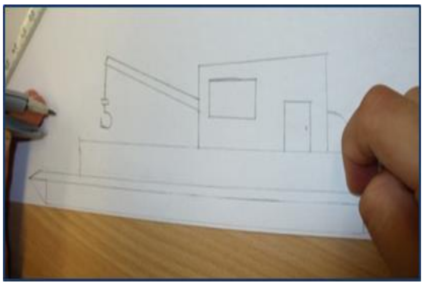
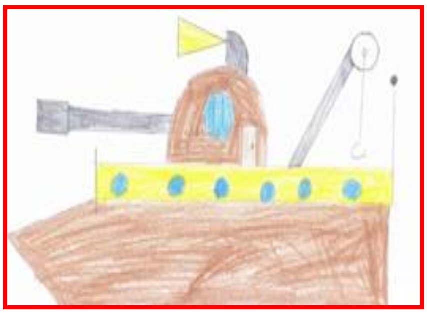
Očekávaný výstup	M-5-3-01 Žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnice); užívá jednoduché konstrukce

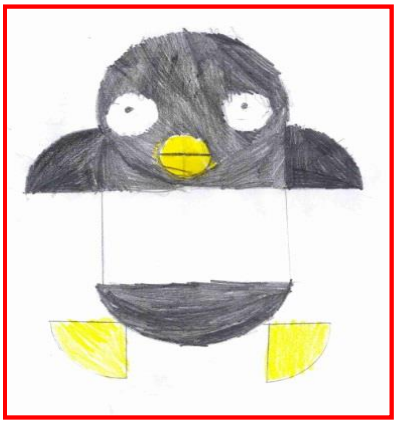
Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

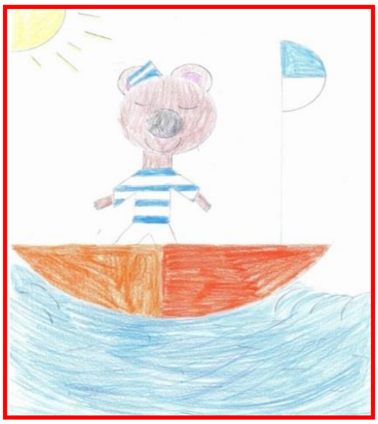
Vezmi si čtvrtku a nakresli na ni libovolný obrázek pomocí kružítka a pravítka. Na svém rýsovaném obrázku můžeš mít cokoliv, ale musí v něm být přímky rovnoběžné, přímky kolmé, kruh, půlkruh i čtvrtkruh. (Přemýšlej, jak asi čtvrtkruh vypadá, určitě na to přijdeš).

Možná řešení s metodickým komentářem

Nacvičujeme dovednosti v rýsování. Úloha je vhodná pro rozvíjení tvůrčí představivosti žáků i seznámení s tvarem čtvrtkruhu (lze jej dobře využívat v tématu „zlomky“).
Dáme-li žákům dostatečný časový prostor, překvapí nás bohatstvím své fantazie i přesností (smysluplného) rýsování. Úloha je vhodná i jako domácí cvičení.

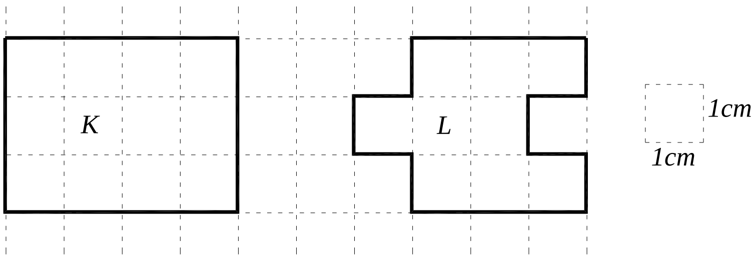




Očekávaný výstup	M-5-3-01 Žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnice); užívá jednoduché konstrukce

Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

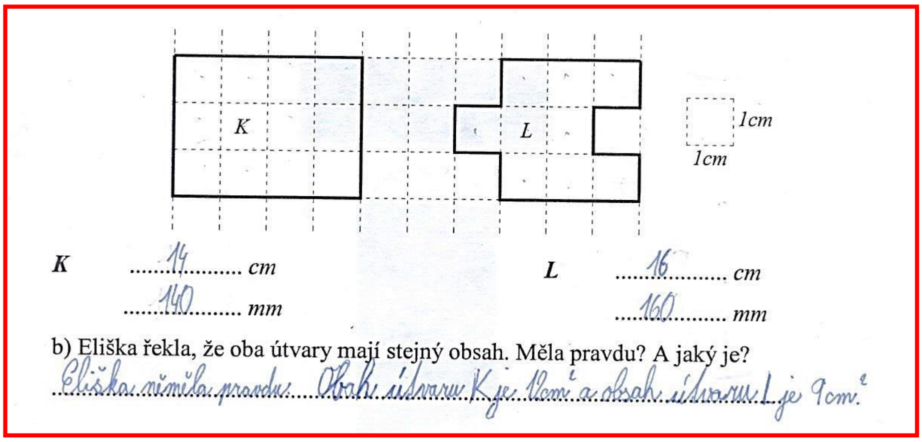
a) Na obrázku jsou dva rovinné útvary K a L. Jaký je jejich obvod? Údaje zapiš v centimetrech i v milimetrech.



b) Eliška řekla, že oba útvary mají stejný obsah. Měla pravdu? A jaký je?

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha jednoduchá, bez kritických míst.



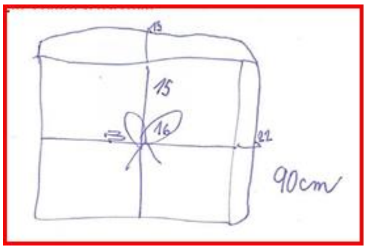
Očekávané výstupy	M-5-3-02 Žák sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran M-5-3-04 Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

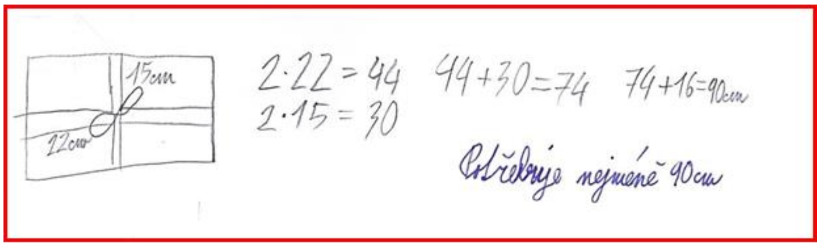
Ilustrativní úloha 5	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Jak dlouhou stuhu určitě potřebuješ na zabalení tenkého blahopřání o délce 22 cm a šířce 15 cm? Na mašličku potřebuješ 16 cm. Pomoz si náčrtkem.

Možné řešení s metodickým komentářem

Pro řadu žáků je obtížné nakreslit si jednoduchý obrázek. Pokud to zvládnou, ujasní si situaci popsanou v zadání, pak zvolí i správný postup řešení. Požadovali jsme vlastně jen odpověď, proto za správný výsledek budeme považovat i ten bez zápisu jednotlivých výpočtů.

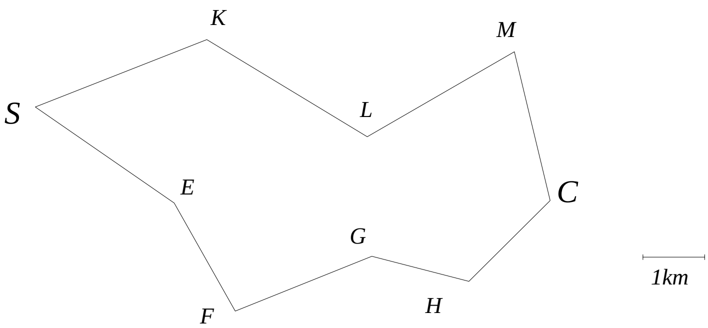




Očekávaný výstup	M-5-3-02 Žák sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran

Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Na plánku dvou cest k pokladu jsou od startu *S* do cíle *C* vyznačena kontrolní stanoviště.

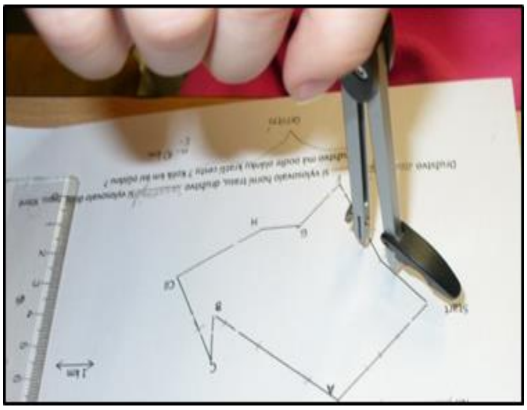


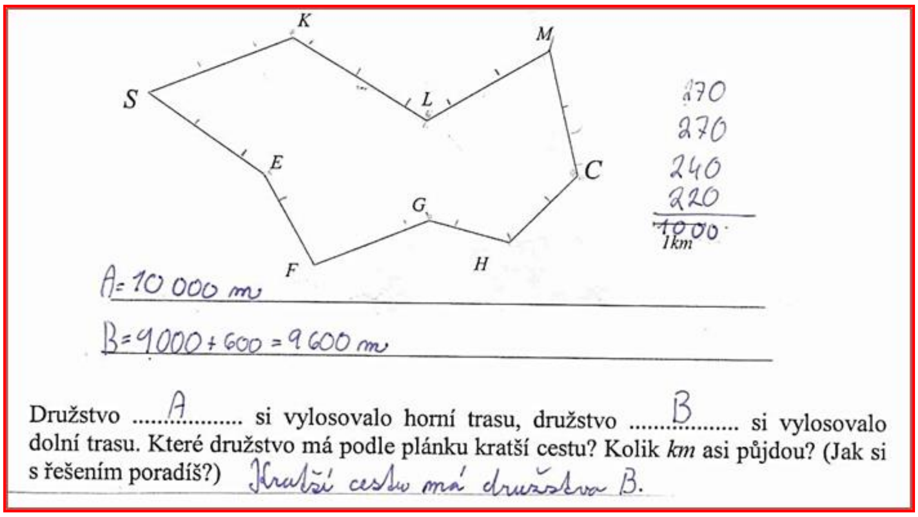
Družstvo .... si vylosovalo horní trasu, družstvo .... si vylosovalo dolní trasu. Které družstvo má podle plánku kratší cestu? Kolik km asi půjdou?
(Jak si s řešením poradíš?)

Možná řešení s metodickým komentářem

Procvičujeme délku úsečky, grafický součet úseček, měření úsečky, porovnávání úseček. Žáci spontánně volí různé strategie; využívají k přenášení úseček na zvolené polopřímky proužek papíru, jiní kružítko, někteří používají kružítko jako tzv. odpichovátko s rozevřením ramen na zvolenou jednotku.

Není cílem měřit s dokonalou přesností, důležitá je úvaha, jak úlohu vyřešíme.
(Většina dětí volí úžasné názvy družstev, jako třeba Oko netopýra, Sokolí křídla, Bonbónci, Smajlíci.)





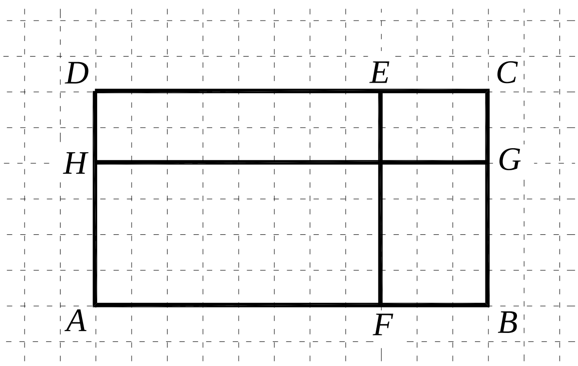
Družstvo ....A........ si vylosovalo horní trasu, družstvo ....B........ si vylosovalo dolní trasu. Které družstvo má podle plánku kratší cestu? Kolik *km* asi půjdou? (Jak si s řešením poradíš?) Kratší cestu má družstvo B.

Očekávaný výstup	M-5-3-02 Žák sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran

Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

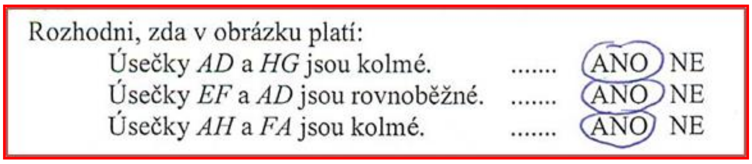
Rozhodni, zda v obrázku platí:

Úsečky *AD* a *HG* jsou kolmé.	ANO	NE
Úsečky *EF* a *AD* jsou rovnoběžné.	ANO	NE
Úsečky *AH* a *FA* jsou kolmé.	ANO	NE



Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha zdánlivě jednoduchá, přesto v ní řada žáků chybuje. Nejčastější chybou je, že úsečky, které nemají společný krajní bod, nepovažují za kolmé.


Rozhodni, zda v obrázku platí:
Úsečky *AD* a *HG* jsou kolmé. .... ANO NE
Úsečky *EF* a *AD* jsou rovnoběžné. .... ANO NE
Úsečky *AH* a *FA* jsou kolmé. .... ANO NE

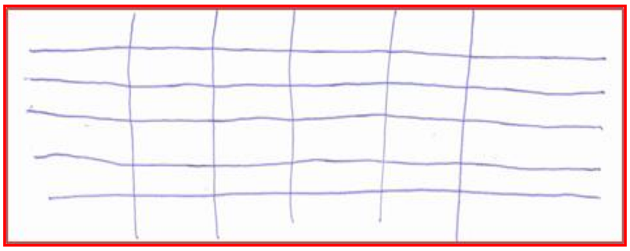
Očekávaný výstup	M-5-3-03 Žák sestrojí rovnoběžky a kolmice

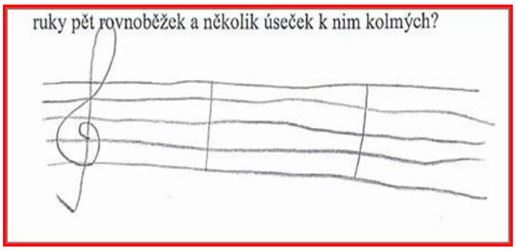
Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Až bude Ondřej dospělý, bude hudebním skladatelem. Jak má chvilku čas, kreslí od ruky notovou osnovu, připraví si takty a už vymýšlí skladbu. Dokážeš také nakreslit jenom od ruky bez pravítka pět rovnoběžek a několik úseček k nim kolmých?

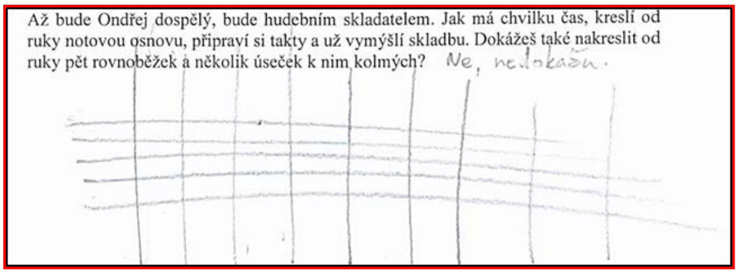
Možná řešení s metodickým komentářem

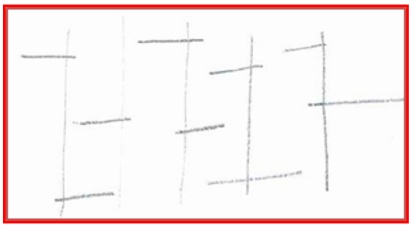
V současnosti se v českých školách zdá úloha velmi obtížná. Naši žáci nejsou zvyklí kreslit v geometrii od ruky a mají dokonce strach kreslit rovnou čáru, natož rovnoběžky. Je potřeba tyto dovednosti trénovat, povzbuzovat jejich sebevědomí a vyprávět, jak každý konstruktér si své geniální nápady nejprve kreslí, potom třeba rýsuje pravítkem a kružítkem nebo na počítači.
(Překvapivé je, že minimum dětí v páté třídě ví, jak vypadá notová osnova.)





Jeden žák nám odpověděl: „Ne, nedokážu." (I když patřil k těm lepším kreslířům.) A žák s ADHD vyřešil úkol tak, jak jej z textu pochopil.





Očekávaný výstup	M-5-3-03 Žák sestrojí rovnoběžky a kolmice

Ilustrativní úloha 9	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

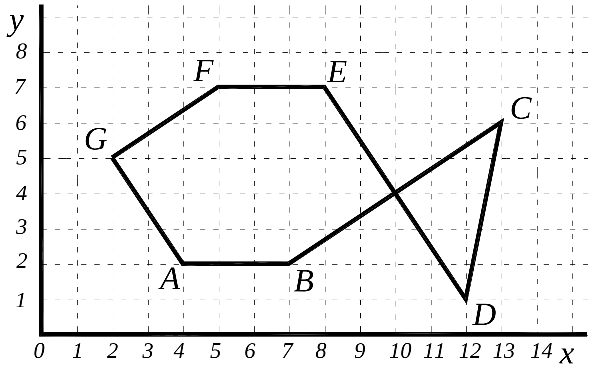
a) Verunka zakreslila do čtvercové sítě rybu jednou uzavřenou lomenou čarou (říkáme jí také „jednotažka"). Zapiš souřadnice bodů, které musela spojovat.

b) Kde je asi oko ryby a jaké má souřadnice?

A[4,2], B

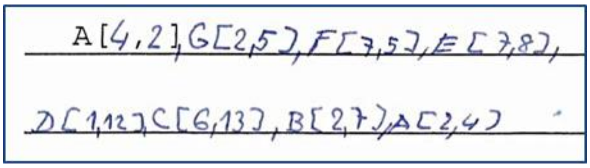
c) Najdeš v obrázku dvojice rovnoběžných úseček? (Zapiš je.)

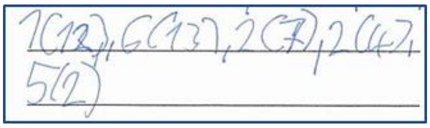
d) Najdeš v obrázku dvojice kolmých úseček? (Zapiš je.)



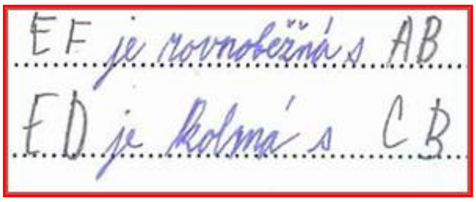
Možná řešení s metodickým komentářem

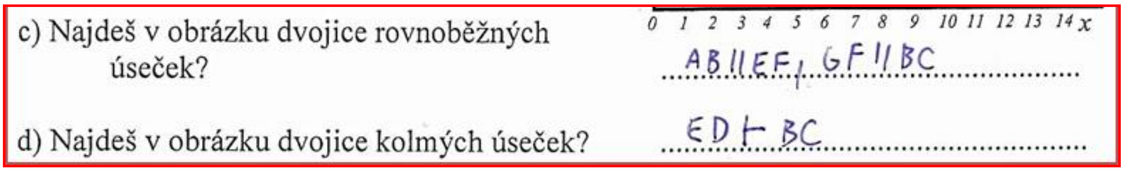
Nové pojetí geometrie na 1. stupni vyžaduje, aby se žáci dobře orientovali v souřadném systému, dokázali souřadnice bodů určovat a naopak body o daných souřadnicích zakreslovat.
Téma je propojeno s učivem o rovnoběžkách a kolmicích.
Při určování souřadnic se stává, že je během řešení úlohy zaměněno pořadí souřadnic.
Pro některé žáky je úloha nad jejich síly.



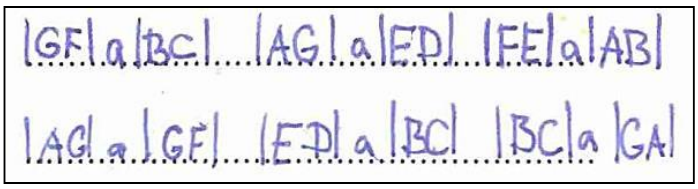


Při zápisu rovnoběžnosti a kolmosti akceptujeme symbolický zápis i slovní zápis, odpustíme špatný symbol pro kolmost. (Na prvním stupni bychom měli preferovat slovní vyjadřování a minimum symbolických zápisů).





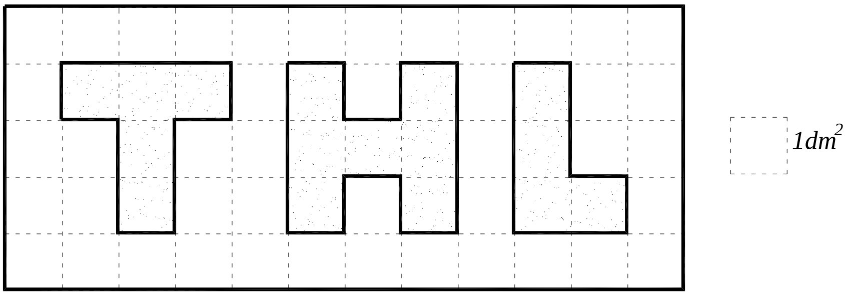
Můžeme být shovívaví k tomu, když žák zapisuje úsečku v rovných závorkách, zvláště když zaznamenáme dobrý žákův postřeh, že i úsečky BC a GA jsou kolmé (podobně jako ještě GF a ED).



Očekávaný výstup	M-5-3-03 Žák sestrojí rovnoběžky a kolmice

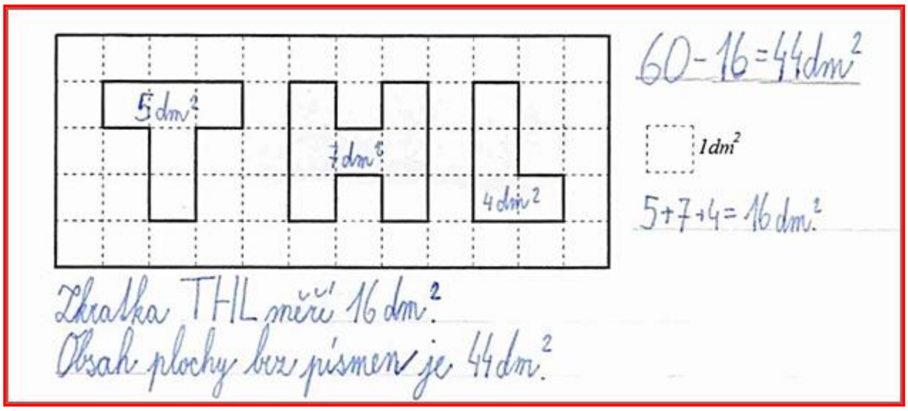
Ilustrativní úloha 10	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Jistá hokejová liga má zkratku THL, jak je napsáno na tabuli.
a) Urči obsah každého písmene této zkratky pomocí čtvercové sítě.
b) Jaký je obsah plochy, která na tabuli zbyla bez písmen?



Možná řešení s metodickým komentářem

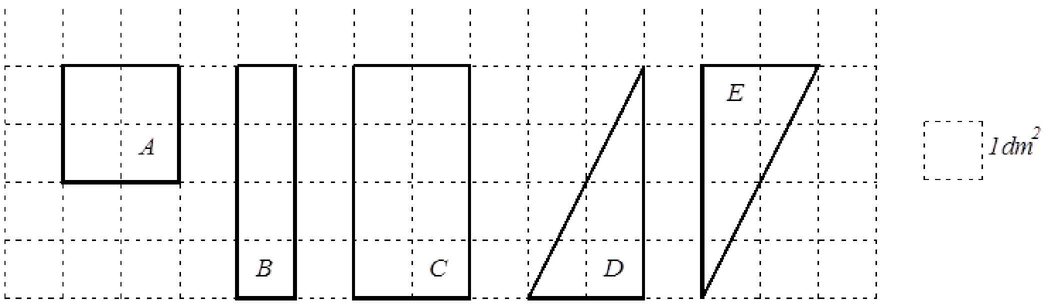
Žáci volí různé způsoby řešení. Úloha je snadná i pro slabší žáky, ti většinou volí metodu počítání po jednotlivých čtvercích u obou částí úlohy.



Očekávaný výstup	M-5-3-04 Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

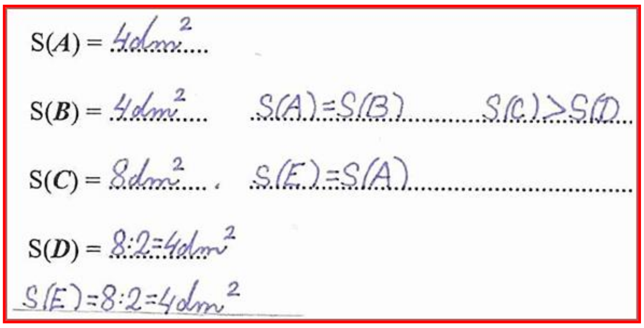
Ilustrativní úloha 11	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

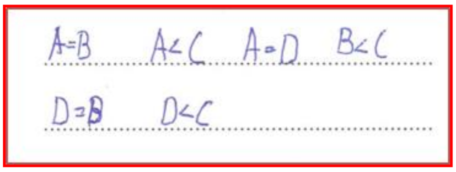
Do čtvercové sítě (vzdálenost mřížových bodů je 1 dm) jsou zakresleny rovinné útvary označené *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Urči a porovnej jejich obsahy.

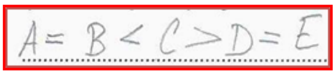


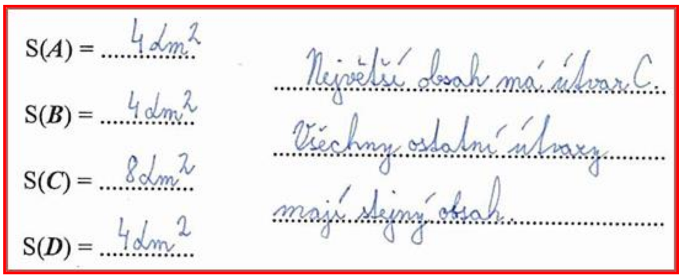
Možná řešení s metodickým komentářem

Obsahy útvarů *A*, *B*, *C* určí většina žáků správně, kritický moment nastává v přechodu k trojúhelníkům. Při porovnání obsahů žáci často porovnávají čísla (8 > 4) nebo napíší, že *C* je největší. Můžeme akceptovat různé zápisy:





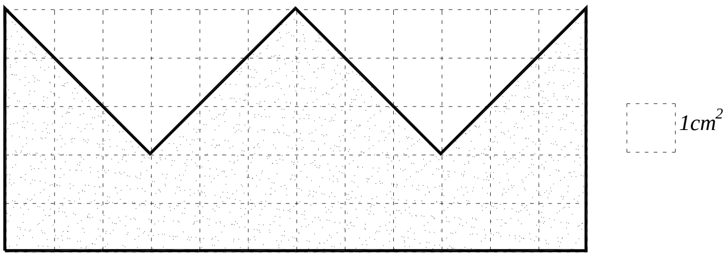




Očekávaný výstup	M-5-3-04 Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

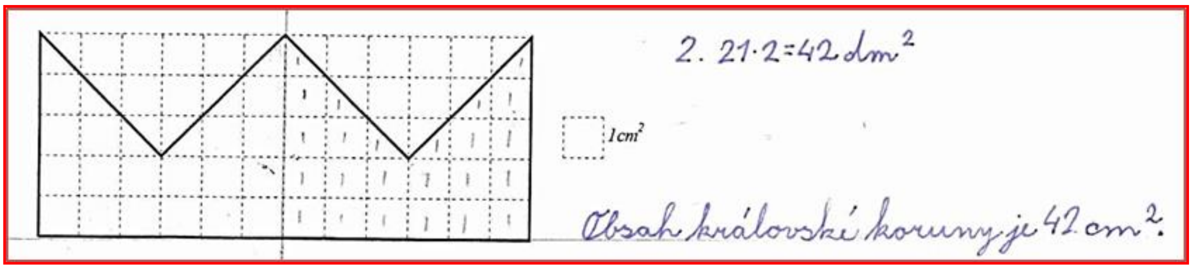
Ilustrativní úloha 12	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

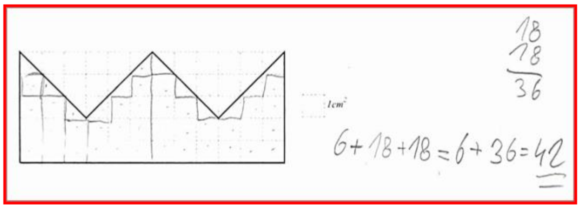
Vypočítej obsah královské koruny.

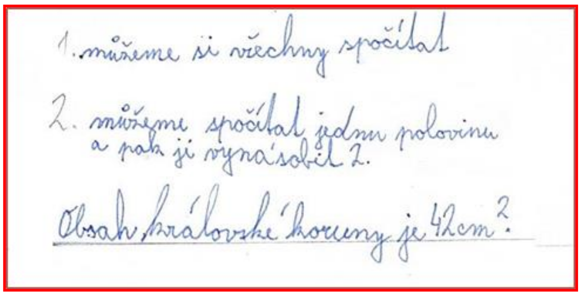


Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha žáky zaujme, volí různé strategie řešení. Oceníme ty efektivní. Vyskytují se hlavně chyby z nepozornosti.



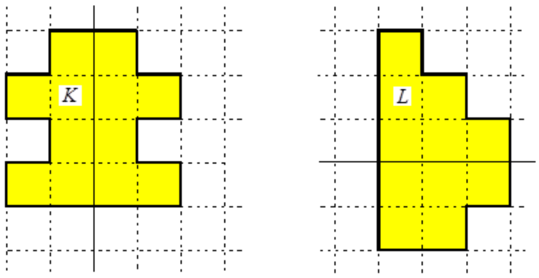




Očekávaný výstup	M-5-3-04 Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

Ilustrativní úloha 13	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

a) Který z útvarů je osově souměrný?



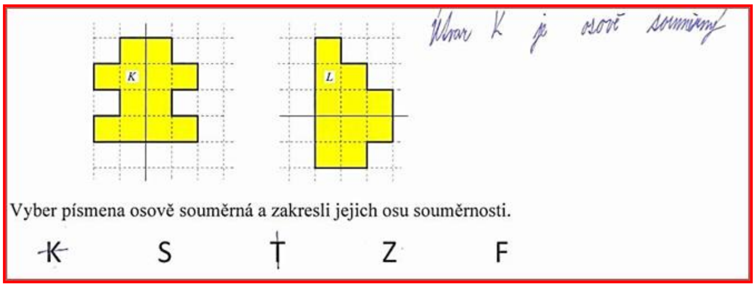
b) Vyber písmena osově souměrná a zakresli jejich osu souměrnosti.

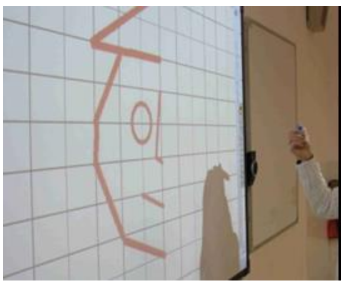
K S T Z F

Možná řešení s metodickým komentářem

a) Úkol je vcelku jasný, při základních znalostech dobře splnitelný.

b) Žáci se obvykle dopouštějí chyb při určování souměrnosti u písmen S a Z (zvídavé děti můžeme navést ke středové souměrnosti).





K řešení úloh o osové souměrnosti lze využít interaktivní tabuli.

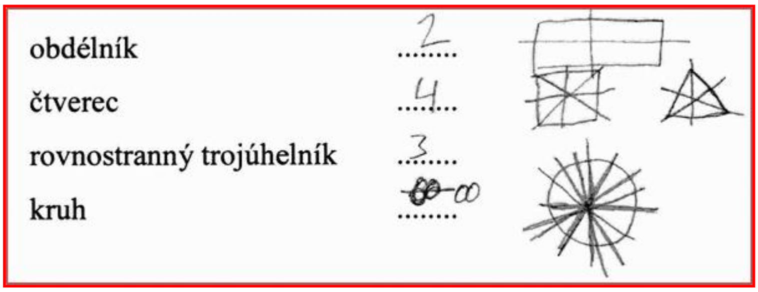
Očekávaný výstup	M-5-3-05 Žák rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

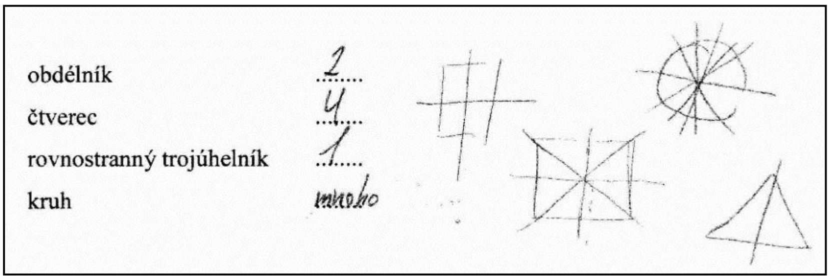
Ilustrativní úloha 14	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Urči u rovinných útvarů počet os souměrnosti: obdélník, čtverec, rovnostranný trojúhelník, kruh.

Možná řešení s metodickým komentářem

Úlohu řešíme souběžně s manipulativní činností – s překládáním papíru. Žáci pak sami docházejí ke správným výsledkům, problémem zůstává rovnostranný trojúhelník. (Málokdy jej žáci vystřihují z papíru, můžeme úlohu spojit s jeho konstrukcí kružítkem a pravítkem.)





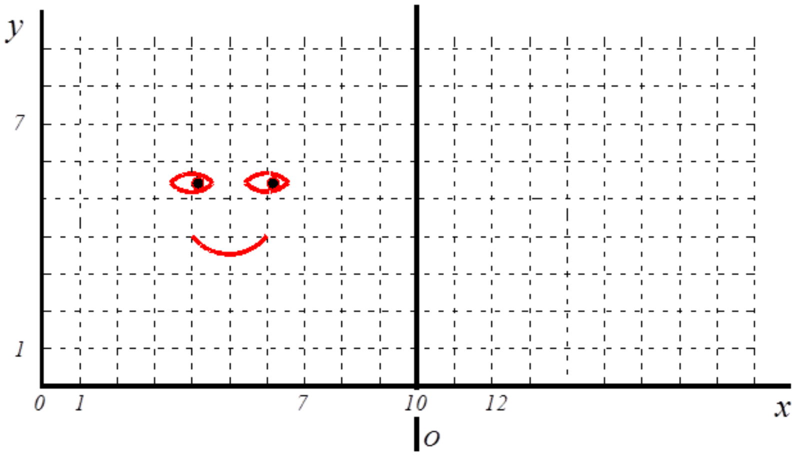
Očekávaný výstup	M-5-3-05 Žák rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

Ilustrativní úloha 15	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Na obrázku je čtvercová síť s vyznačenými osami ***x*** a ***y***.
Svislá přímka ***o*** prochází bodem, který má souřadnice [10, 0].
a) Zakresli do čtvercové sítě body
A[4, 8], *B*[2, 8], *C*[2, 4], *D*[4, 2], *E*[6, 2], *F*[8, 4], *G*[8, 6], *H*[6, 8]
a spoj je lomenou čarou *ABCDEFGHA*.

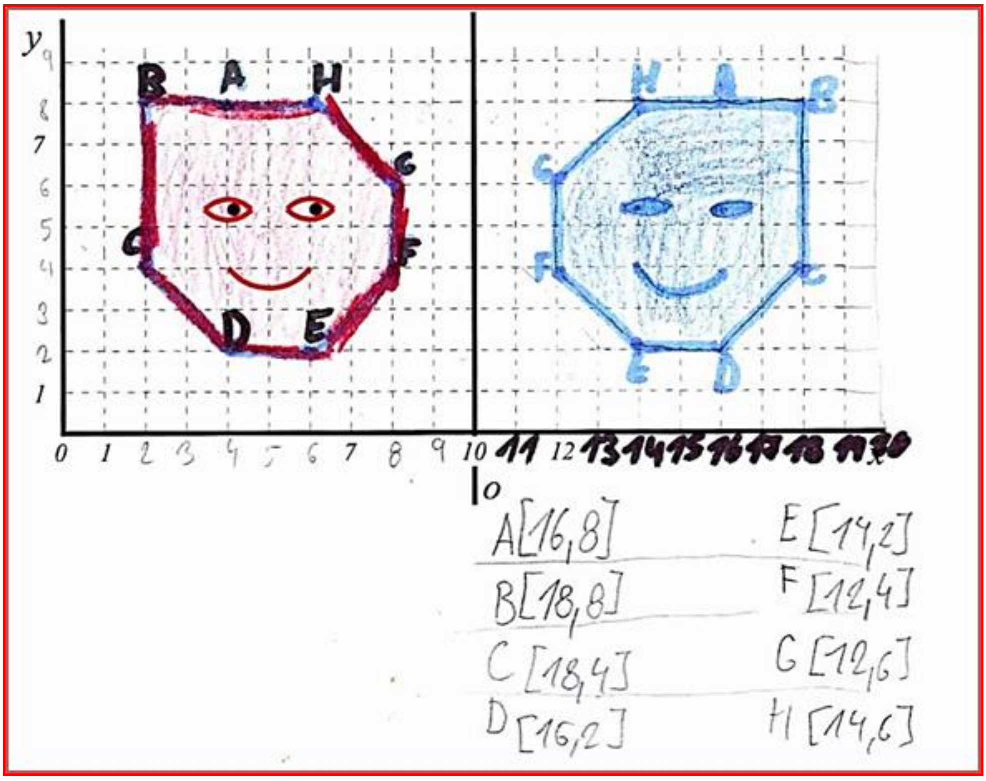
b) K červenému obrázku ABCDEFGHA nakresli jeho modrý obraz ABCDEFGHA , který s ním bude osově souměrný podle osy ***o***.

c) Zapiš souřadnice modrých bodů *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*.



Možná řešení s metodickým komentářem

Další úloha na procvičení souřadnic, tentokrát s osovou souměrností. Úloha je náročná na soustředění, žáci v ní často chybují. V autentickém žákovském řešení se žák dopustil chyby pouze u posledního bodu (správně má být *H*[14, 8]).



Očekávaný výstup	M-5-3-05 Žák rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

Druhý stupeň ZŠ

Zvláštností školní (nespecializované) geometrie je skutečnost, že jejími pilíři jsou dva typy inteligence: matematicko-logická inteligence a prostorová inteligence. Zatímco v početních geometrických úlohách využíváme převážnou měrou první z nich, konstrukční úlohy v rovině a prostoru vyžadují právě druhou skupinu schopnosti. A zde je mnohdy skryt problém, který by měl učitel zaznamenat: žák je výborný počtář, ale při řešení čistě geometrických úloh znejistí.

Prostorová inteligence (geometrická představivost) je směsicí mnoha schopností, které můžeme ve vztahu ke geometrii ilustrovat jednoduchými příklady: žák je schopen rozpoznat tvar (*vnímá šestiúhelník, kužel apod.*), má schopnost útvary transformovat v rovině i v prostoru (*shodná a podobná zobrazení*), má schopnost vytvářet si mentální představy o tvarech a následně je měnit (*vytváří si v mysli vizuálně prostorový zásobník plný ideálních modelů geometrických útvarů a dokáže řešit úlohy podobně, jako kdyby s nimi skutečně pracoval*), žák je schopen grafického záznamu (*nakreslí výstižně geometrické tvary a vztahy*).

Někteří vědci dokonce považují vizuální a prostorovou představivost za primární zdroj myšlení a upozorňují na to, že *podíl prostorového myšlení na rozvoji přírodních věd se poměrně často podceňuje.*

V geometrii musíme používat i jiný typ myšlení. Připomeňme, že rozlišujeme dva typy myšlení: propoziční a imaginativní. ***Propoziční myšlení*** je jakýmsi proudem myšlenek, které „v duchu slyšíme“. (*Žák se dokáže naučit zpaměti postup konstrukce a odříkávat si jej*.) Oproti tomu ***imaginativní myšlení*** odpovídá zrakovým představám, které „v duchu vidíme“. (*Žák nedokáže své řešení úlohy slovně popsat, tvrdí, že ho vidí.)*

Nad rámec intelektuálních schopností matematicko-logických a prostorových jsou kognitivní operace zvané „zdravý selský rozum“ a originalita. Právě tzv. selským rozumem jsou obdařeni jedinci s technickým nadáním. Jsou schopni řešit problémy intuitivním, rychlým a ve většině případů i nečekaně správným způsobem. Často tuto schopnost provází i originalita. Výzkumy ukazují, že tyto dva typy se neodvíjejí od hodnoty IQ a neodhalí je testování. Je nesmírně obtížné technické talenty objevit; většinou oplývají schopnostmi matematicko-logickými, prostorovými, ale právě také zdravým rozumem, originalitou a pro praktické technické činnosti nutnou tělesnou inteligencí. Úlohou učitele je prostřednictvím vyučování geometrie potenciální vynálezce motivovat, rozvíjet jejich nadání a nedusit ho formálními požadavky a nároky.

K jednotlivým očekávaným výstupům pro 2. stupeň je ve *Standardech pro základní vzdělávání* uvedena celá řada indikátorů, které se promítají do obsahu učebních materiálů. Doplňme ještě další informace o cílech a obsahu učiva spolu s některými didaktickými poznámkami.

- V planimetrii například žák vyhledává různé typy trojúhelníků, dokáže rozložit mnohoúhelník na trojúhelníky a aplikuje tuto techniku v kontextu s řešením reálných problémů (výpočet plochy zahrady).
- Žák zakresluje mnohoúhelníky v souřadnicové rovině, jsou-li dány souřadnice vrcholů.
- Již od prvního stupně žák rozumí větě o trojúhelníkových nerovnostech a dokáže ji aplikovat v rozhodovacích úlohách.
- Pythagorovu větu používá při výpočtu délky neznámé strany pravoúhlého trojúhelníku, pomocí obrácené věty rozhoduje, zda trojúhelník je či není pravoúhlý.
- Žák se seznamuje s větami o shodnostech trojúhelníků, použije je při výpočtech a v důkazových úlohách.
- Zvlášť obtížné bývá učivo o „množinách bodů daných vlastností“. Obtíž bývá často způsobena pro žáky nesrozumitelným jazykem – zobecněným pojmenováním tohoto typu úloh. Snažíme se žákům slovní spojení nahrazovat v konkrétních úlohách přirozeným jazykem.
- Nejenom u stereometrických, ale i u planimetrických úloh vedeme žáky k tomu, aby si úlohu promysleli a pečlivě si ji od ruky načrtli, aby dokázali odhadovat dané délky úseček (středy úseček), velikosti úhlů, polohu útvarů apod. *Například: a) Načrtni úsečku délky 3 cm a doplň čtverec. b) Jsou dány dva různé body A, B vzdálené 5 cm. Vyhledej v rovině body P, Q, R, T, které budou mít od bodů A, B stejnou vzdálenost. c) Nakresli kružnici k(S; 4) a zvol její tětivu XY. Vyhledej tu tětivu, která je s ní*

osově souměrná podle ↔YS (středově souměrná podle S). Myšlenkové úvahy jsou cennější, než pečlivá „bezmyšlenková“ konstrukce.

- U konstrukčních úloh trváme na všech krocích řešení. Zvláště trváme na provádění rozboru problému a plánu řešení, jak je ostatně uvedeno v RVP ZV v cílovém zaměření této oblasti.
- Ve stereometrii si žák prohlubuje své znalosti o tělesech a jejich sítích, dokáže tělesa třídit na základní typy; tělesa hranatá (hranol, jehlan, komolý jehlan, pravidelné mnohostěny, apod.), tělesa oblá (válec, kužel, komolý kužel), těleso kulaté (koule).
- Během školního vzdělávání si žák vytvořil mentální představy těles a dokáže provádět v mysli některé jednoduché operace. Například *Dejte hlavy na lavice a pozorně poslouchejte, vnímejte jenom sluchem. Stavím stavbu z krychlí. Položím zleva doprava těsně k sobě 6 krychlí. Na prostřední dvě postavím po jedné krychli. Jak vypadá stavba?* (*Stupně vítězů.*)

Očekávané výstupy tematického okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* jsou pro 2. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematiky a její aplikace do níže uvedených konkrétnějších indikátorů (nastavených na minimální úroveň).

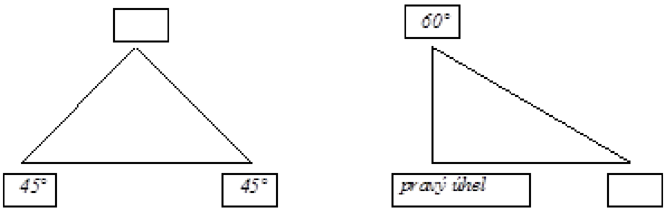
Očekávaný výstup	M-9-3-01 Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku
Indikátory	1. žák využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata, modely 2. žák využívá polohové a metrické vlastnosti (Pythagorova věta, trojúhelníková nerovnost, vzájemná poloha bodů a přímek v rovině, vzdálenost bodu od přímky) k řešení geometrických úloh 3. žák řeší geometrické úlohy početně 4. žák využívá matematickou symboliku
Očekávaný výstup	M-9-3-02 Žák charakterizuje a třídí základní rovinné útvary
Indikátory	1. žák pozná základní rovinné útvary: přímka, polopřímka, úsečka, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník, pravidelné mnohoúhelníky, kružnice, kruh 2. žák rozliší typy úhlů (ostrý, tupý, pravý, přímý), typy trojúhelníků a čtyřúhelníků
Očekávaný výstup	M-9-3-03 Žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem
Indikátory	1. žák sčítá a odčítá úhly, určí násobek úhlu (bez převodu stupňů a minut) 2. žák využívá při výpočtech součet vnitřních úhlů v trojúhelníku 3. žák určuje velikost úhlu pomocí úhloměru
Očekávaný výstup	M-9-3-04 Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů
Indikátory	1. žák odhaduje obsah i obvod útvarů pomocí čtvercové sítě 2. žák určí výpočtem obsah (v jednodušších případech) trojúhelníku, čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, lichoběžníku, kruhu 3. žák určí výpočtem obvod trojúhelníku, čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, lichoběžníku, kruhu 4. žák používá a převádí jednotky délky 5. žák používá a převádí jednotky obsahu
Očekávaný výstup	M-9-3-05 Žák využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh
Indikátory	1. žák pojmenuje základní množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úhlu, osa rovinného pásu, osa úsečky, kružnice, Thaletova kružnice)
Očekávaný výstup	M-9-3-06 Žák načrtne a sestrojí rovinné útvary
Indikátory	1. žák načrtne rovinný útvar podle slovního zadání

	2. žák provede jednoduché konstrukce (např. osa úsečky, čtverec se zadanou stranou, trojúhelník se zadanými stranami, úhel dané velikosti, rovnoběžka a kolmice daným bodem) 3. žák ověří, zda výsledný útvar odpovídá zadání
Očekávaný výstup	M-9-3-07 Žák užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
Indikátory	1. žák vyhledá z nabídky trojúhelníků dvojice shodných trojúhelníků 2. žák vyhledá z nabídky trojúhelníků dvojice podobných trojúhelníků
Očekávaný výstup	M-9-3-08 Žák načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar
Indikátory	1. žák rozhodne, zda je útvar osově souměrný 2. žák určí osy souměrnosti rovinného útvaru 3. žák rozhodne, zda je útvar středově souměrný 4. žák určí střed souměrnosti 5. žák načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti
Očekávaný výstup	M-9-3-09 Žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti
Indikátory	1. žák rozpozná mnohostěny (krychle, kvádr, kolmý hranol, jehlan) a rotační tělesa (válec, kužel, koule) 2. žák používá pojmy podstava, hrana, stěna, vrchol, tělesová a stěnová úhlopříčka
Očekávaný výstup	M-9-3-10 Žák odhaduje a vypočítá objem a povrch těles
Indikátory	1. žák odhaduje a vypočítá povrch krychle, kvádru a válce 2. žák odhaduje a vypočítá objem krychle, kvádru a válce 3. žák používá a převádí jednotky objemu
Očekávaný výstup	M-9-3-11 Žák načrtne a sestrojí sítě základních těles
Indikátory	1. žák používá pojmy síť tělesa, plášť, podstava 2. žák rozpozná sítě základních těles (krychle, kvádr, kolmý hranol, jehlan, válec, kužel) 3. žák načrtne a sestrojí síť krychle
Očekávaný výstup	M-9-3-12 Žák načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině
Indikátory	1. žák rozpozná, z jakých základních těles je zobrazené těleso složeno 2. žák načrtne krychli a kvádr ve volném rovnoběžném promítání 3. žák sestrojí krychli ve volném rovnoběžném promítání
Očekávaný výstup	M-9-3-13 Žák analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu
Indikátory	1. žák vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy 2. žák řeší jednoduchou úlohu 3. žák ověří výsledek úlohy

Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Geometrie v rovině*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi. Ta, která budeme hodnotit jako správná, jsou v červených rámečcích.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Do rámečků doplň chybějící velikosti úhlů v trojúhelnících.



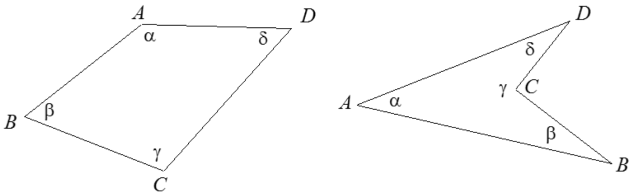
Možná řešení s metodickým komentářem

Ověřujeme základní znalosti o velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku. Úloha nečiní žákům potíže, je bez kritických míst, jednoduchá.

Očekávaný výstup	M-9-3-03 Žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem

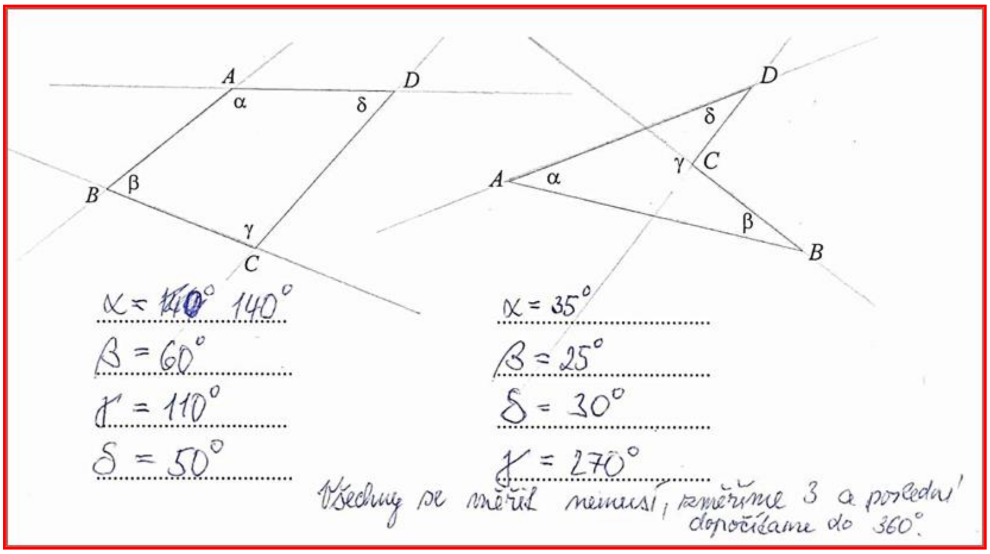
Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Změř úhloměrem velikosti všech vnitřních úhlů ve čtyřúhelnících. Zapisuj hodnoty.
Umíš si ověřit správnost měření výpočtem?



Možná řešení s metodickým komentářem

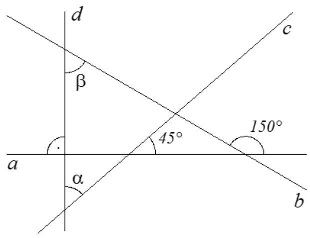
Určujeme velikost úhlu měřením. Využíváme vlastností úhlů ve čtyřúhelnících.
Nejčastěji žáci chybují při mření velikosti nekonvexního úhlu.



Očekávaný výstup	M-9-3-03 Žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem

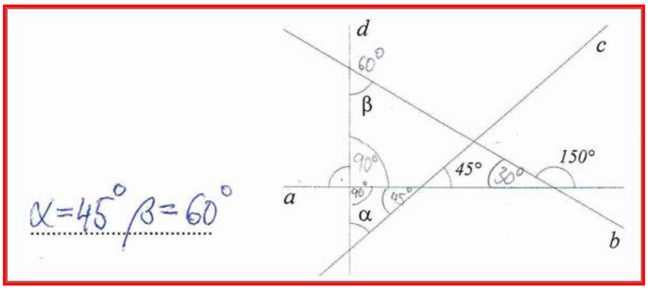
Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Vzájemná poloha přímek ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** je znázorněna obrázkem.
Vypočítej velikosti úhlů ***α*** a ***β*** .

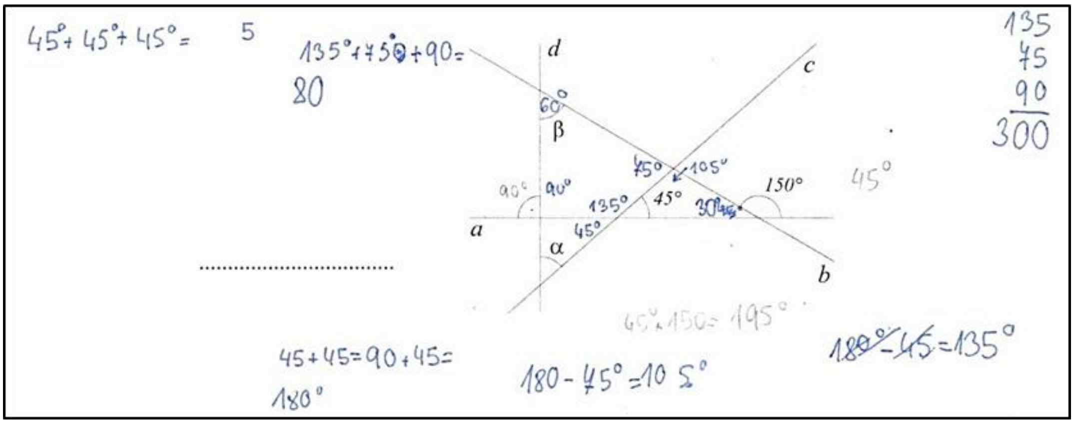


Možná řešení s metodickým komentářem

Určujeme velikost úhlu výpočtem. Využíváme vlastností úhlů vedlejších a vrcholových.
Úloha je pro některé žáky jednodušší než úloha 2. Ve výsledcích je většinou minimum chyb. Akceptujeme, když se žákům s dobrou rovinovou představivostí zdá úloha natolik snadná, že píší přímo výsledek.



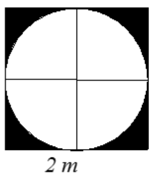
Úloha odhalí žáky preferující syntetický způsob řešení, ti nakonec nemusí dojít ke správnému výsledku nebo nedojdou k výsledku vůbec.



Očekávaný výstup	M-9-3-03 Žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem

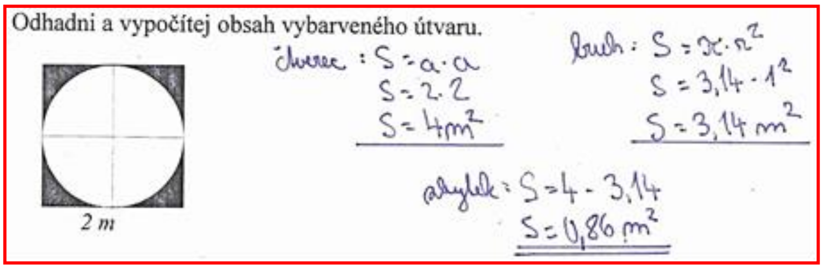
Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Odhadni a vypočítej obsah vybarveného útvaru.



Možná řešení s metodickým komentářem

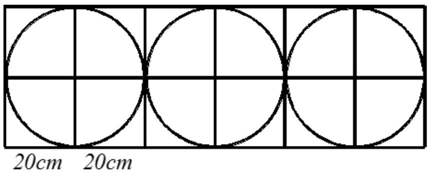
Počítáme obsahy základních rovinných útvarů. Výjimečně se objevuje správný výsledek se špatnou jednotkou (délkovou). Většina žáků však ignoruje požadavek úlohy „odhadni“, na který bychom měli na druhém stupni i při jiných příležitostech klást v matematice důraz.



Očekávaný výstup	M-9-3-04 Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

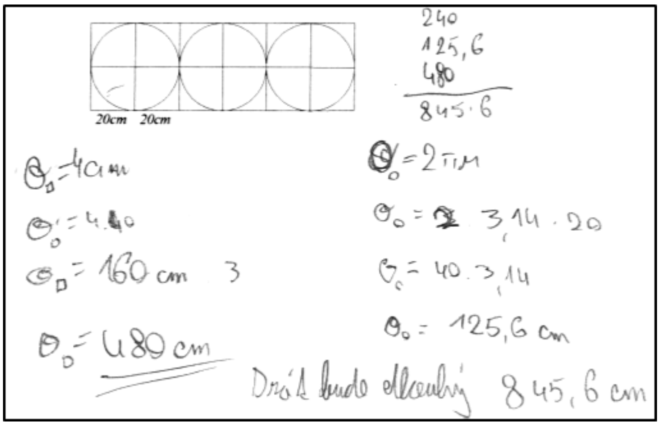
Ilustrativní úloha 5	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

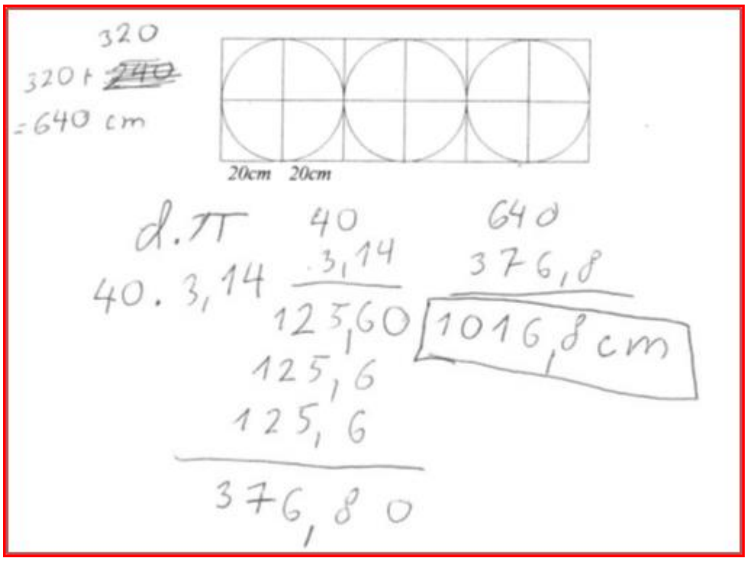
Jak dlouhý drát je třeba k vytvoření ozdobné mříže?



Možná řešení s metodickým komentářem

Počítáme obvody základních rovinných útvarů. I když je úloha zdánlivě jednoduchá, žáci v ní často chybují, nedokáží si ji vhodně rozdělit. Kritická místa – žáci buď některé části zapomínají dopočítat, nebo je započítávají opakovaně. Nejčastěji dělí útvar na čtverce a násobí jejich obvody bez ohledu na to, že mají společné strany.

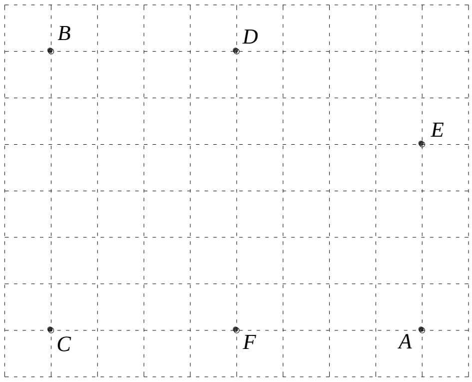




Očekávaný výstup	M-9-3-04 Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

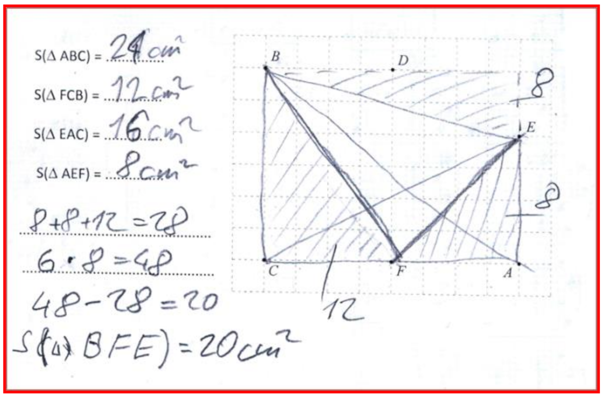
Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Délka strany čtverce v mřížce je jeden centimetr.
Urči obsahy trojúhelníků *ABC*, *FCB*, *EAC*, *AEF*.
Dokážeš určit i obsah trojúhelníků *BFE* a *DCE*?



Možná řešení s metodickým komentářem

Počítáme obsahy základních rovinných útvarů – trojúhelníků.
Nejčastější chyby se objevují při výpočtu obsahů obecných trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou mřížové body.



Očekávaný výstup	M-9-3-04 Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

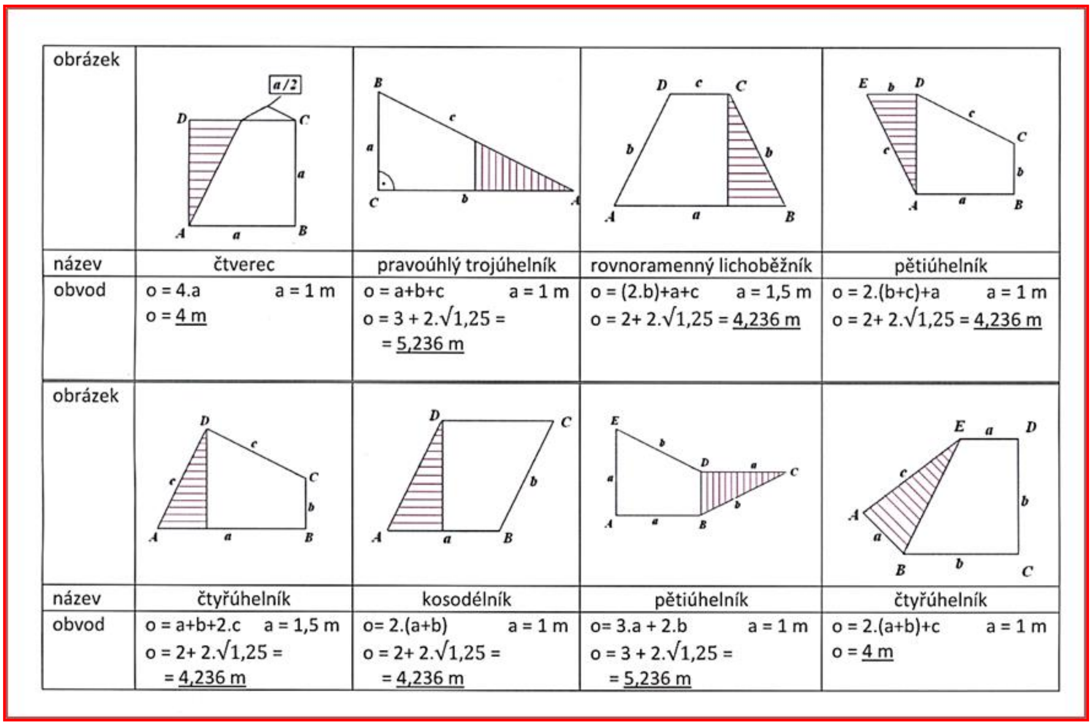
Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Vystřihněte čtverec (jeho strana může měřit 1 dm nebo třeba 1 m) a jedním střihem jej rozdělte na dvě části podle obrázku tak, aby z nich bylo možno sestavit pravoúhlý trojúhelník (nakreslete tuto situaci do druhého pole tabulky).
Najděte všechny možnosti, jak lze přikládat celé strany obou útvarů k sobě. Vzniklá sjednocení nakreslete do tabulky, pokuste se útvar pojmenovat a určete jeho obvod.

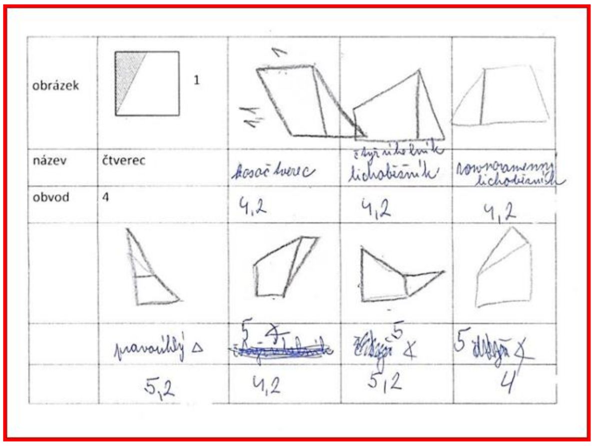
obrázek	 1			
název	čtverec			
obvod	4			
obrázek				
název				
obvod				

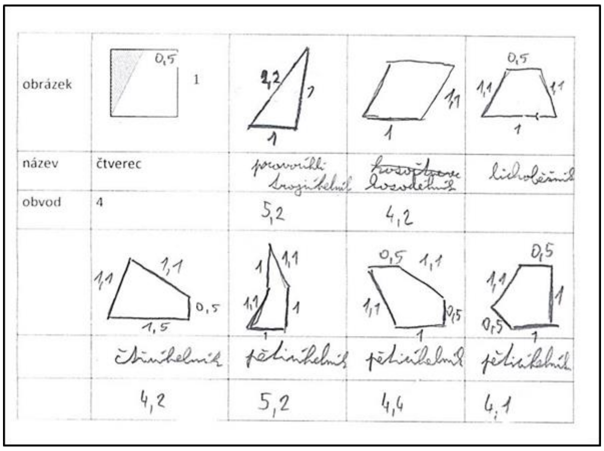
Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha vhodná pro kooperativní práci ve skupinách (3 žáci). Lze ji využít také jako bonusovou pro nadanější žáky.



obrázek				
název	čtverec	pravoúhlý trojúhelník	rovnoramenný lichoběžník	pětiúhelník
obvod	$o = 4.a$ $a = 1\ m$ $o = \underline{4\ m}$	$o = a+b+c$ $a = 1\ m$ $o = 3 + 2.\sqrt{1,25} =$ $= \underline{5,236\ m}$	$o = (2.b)+a+c$ $a = 1,5\ m$ $o = 2 + 2.\sqrt{1,25} = \underline{4,236\ m}$	$o = 2.(b+c)+a$ $a = 1\ m$ $o = 2 + 2.\sqrt{1,25} = \underline{4,236\ m}$
obrázek				
název	čtyřúhelník	kosodélník	pětiúhelník	čtyřúhelník
obvod	$o = a+b+2.c$ $a = 1,5\ m$ $o = 2 + 2.\sqrt{1,25} =$ $= \underline{4,236\ m}$	$o = 2.(a+b)$ $a = 1\ m$ $o = 2 + 2.\sqrt{1,25} =$ $= \underline{4,236\ m}$	$o = 3.a + 2.b$ $a = 1\ m$ $o = 3 + 2.\sqrt{1,25} =$ $= \underline{5,236\ m}$	$o = 2.(a+b)+c$ $a = 1\ m$ $o = \underline{4\ m}$

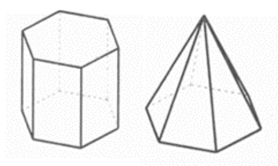




Očekávaný výstup	M-9-3-04 Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

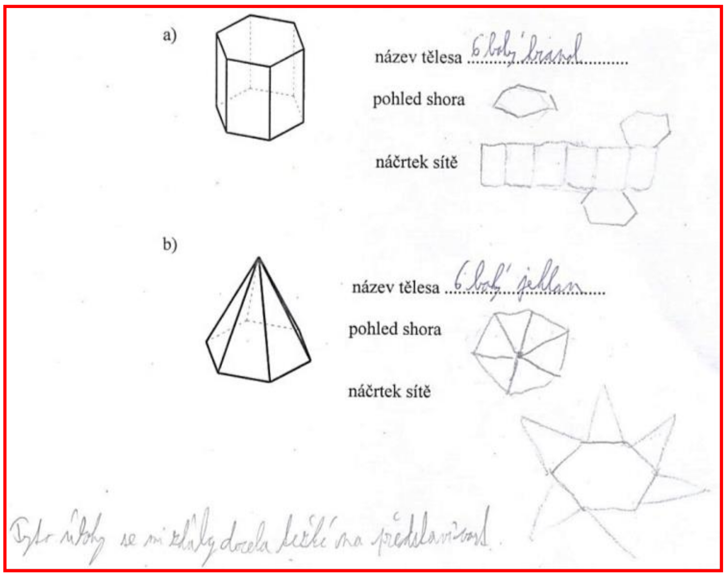
U zakreslených těles uveď název tělesa, pohled shora a náčrtek sítě.

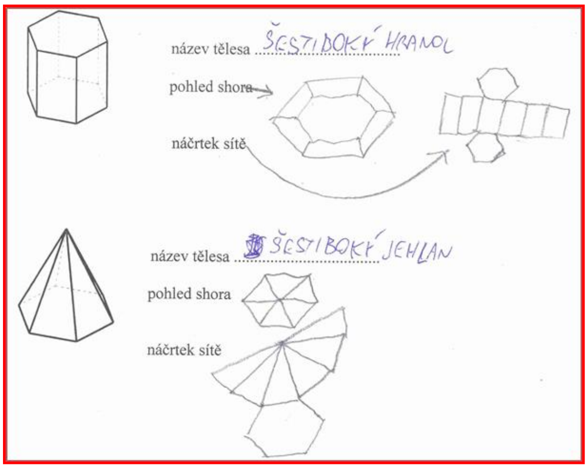


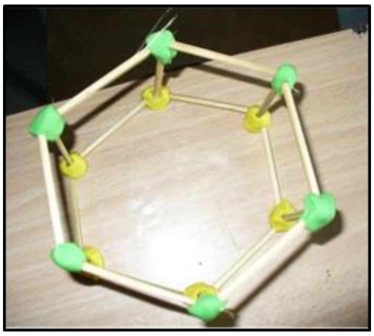
Možná řešení s metodickým komentářem

Žák rozpoznává tělesa, pojmenovává jejich části, kreslí základní pohledy, ověřuje si znalosti týkající se sítí těles. Žákům činí problém hlavně názvy těles, pojmenování jejich částí, správné formulace. Graficky se většinou vyjadřují fakticky správně, kresba je však učiteli považována za příliš nepřesnou. Řešení úlohy lze podepřít konkrétními modely.

Mezi kresbami „pohledů“ se mohou objevit i perspektivní pohledy (viz níže žákovský pohled do dutého šestibokého hranolu), které odpovídají skutečnému „dívání“ (viz fotografie žákovského hranového modelu mnohostěnu). Nejen zde, ale vždy, když učíme žáky kreslit geometrická tělesa, připomínáme, že je to technická konvence (můžeme říkat úmluva), kterou jsme zavedli proto, abychom snadněji získávali z obrázků informace o vzájemné poloze hran, stěn, apod. a že takto bychom tělesa viděli až někde z nekonečna. Posílíme opět žákovu sebedůvěru ve vlastní vidění a zobrazování světa, do kterého patří i svět geometrických prostorových útvarů.







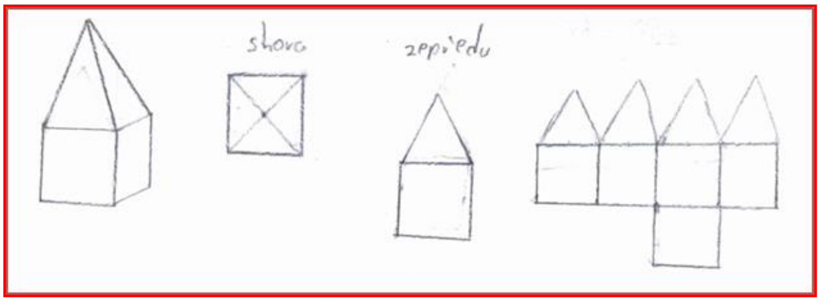
Očekávané výstupy	M-9-3-09 Žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti M-9-3-11 Žák načrtne a sestrojí sítě základních těles

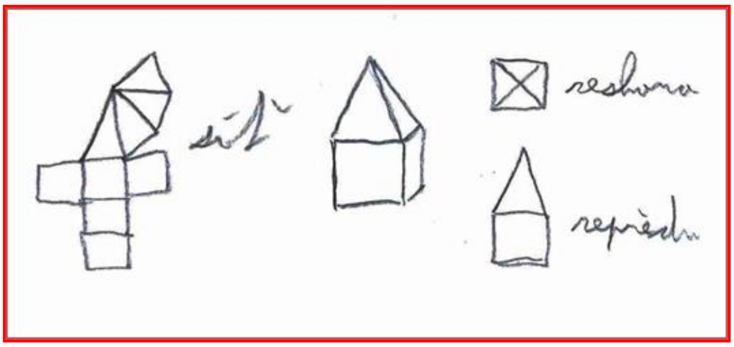
Ilustrativní úloha 9	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

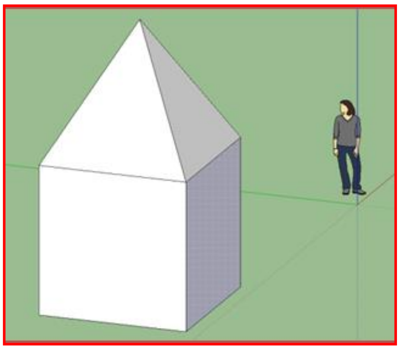
Představuj si, že v dětské dřevěné stavebnici je krychle o hraně 4 cm a pravidelný čtyřboký jehlan, který má délku podstavné hrany i výšku 4 cm. Obě tělesa jsme slepili (podstavu jehlanu se stěnou krychle) a máme nyní těleso jediné.
Nakresli nové těleso.
Nakresli pohledy shora a zepředu.
Nakresli, jaká by byla jeho síť z jednoho kusu (můžeš ji také přesně sestrojit).

Možná řešení s metodickým komentářem

Tentokrát bychom měli žákům poskytnout ticho pro klidnou samostatnou práci, soustředění, vybavování mentálních představ těles a mentálních transformace s nimi. Správnost řešení můžeme na závěr ověřovat pomocí stavebnice *Magformers*, nebo situaci zobrazit v programu *SketchUpMake* (viz níže):







Očekávané výstupy	M-9-3-09 Žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti M-9-3-11 Žák načrtne a sestrojí sítě základních těles

Ilustrativní úloha 10	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

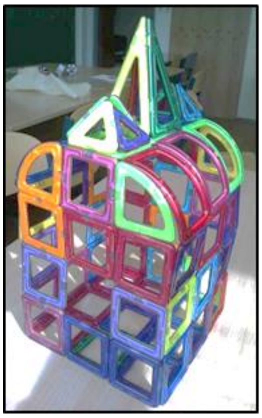
Modeluj různé prostorové sestavy složené ze základních těles hranatých (kvádry, krychle, pravidelné hranoly, jehlany, komolé jehlany) a oblých (válec, kužel, komolý kužel).
K modelování použij modelínu, magnetické stavebnice nebo počítačový program.
Sestavy mohou mít podobu skutečných objektů reálného světa.

Možná řešení s metodickým komentářem

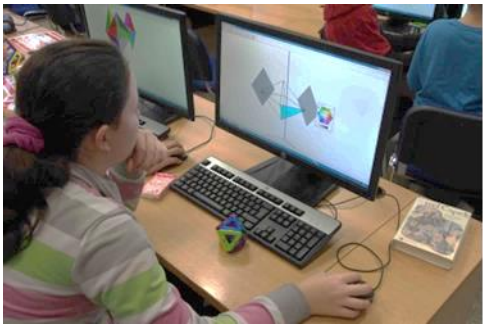
Tyto úlohy nebývají do geometrie 2. stupně zařazovány „z časových a materiálních důvodů". Jsou považovány za méněcenné, neboť jejich splnění nelze ověřit rychlým písemným testem. Jsou považovány za bezduché hraní.
Je to nesmírná škoda. Zde se zúročí vše, co jsme do výuky prostorové geometrie vkládali. Snadno najdeme cestu k rozvíjejícímu se žákovskému technickému talentu.

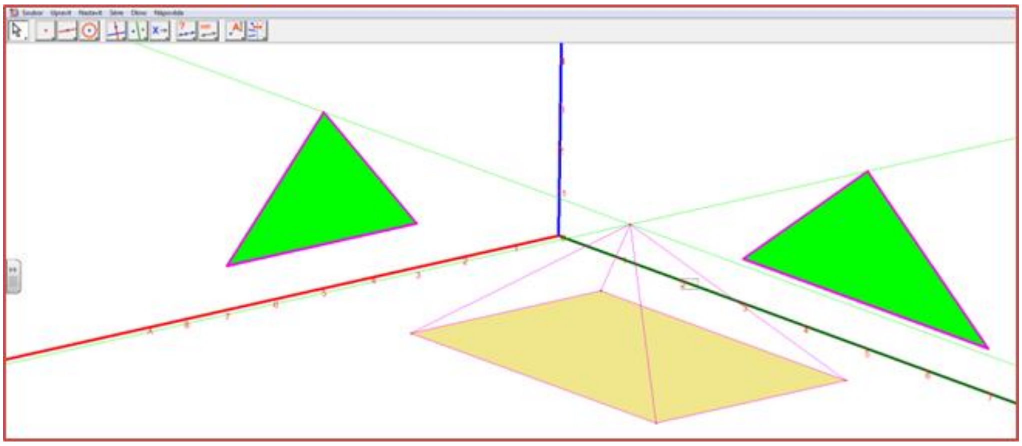
a) Užití modelíny a párátek (materiálně nenáročné)

b) Užití stavebnice *Magformers* (stavebnice je finančně náročná, avšak lze ji dokupovat po částech, je bezpečná a pevná)

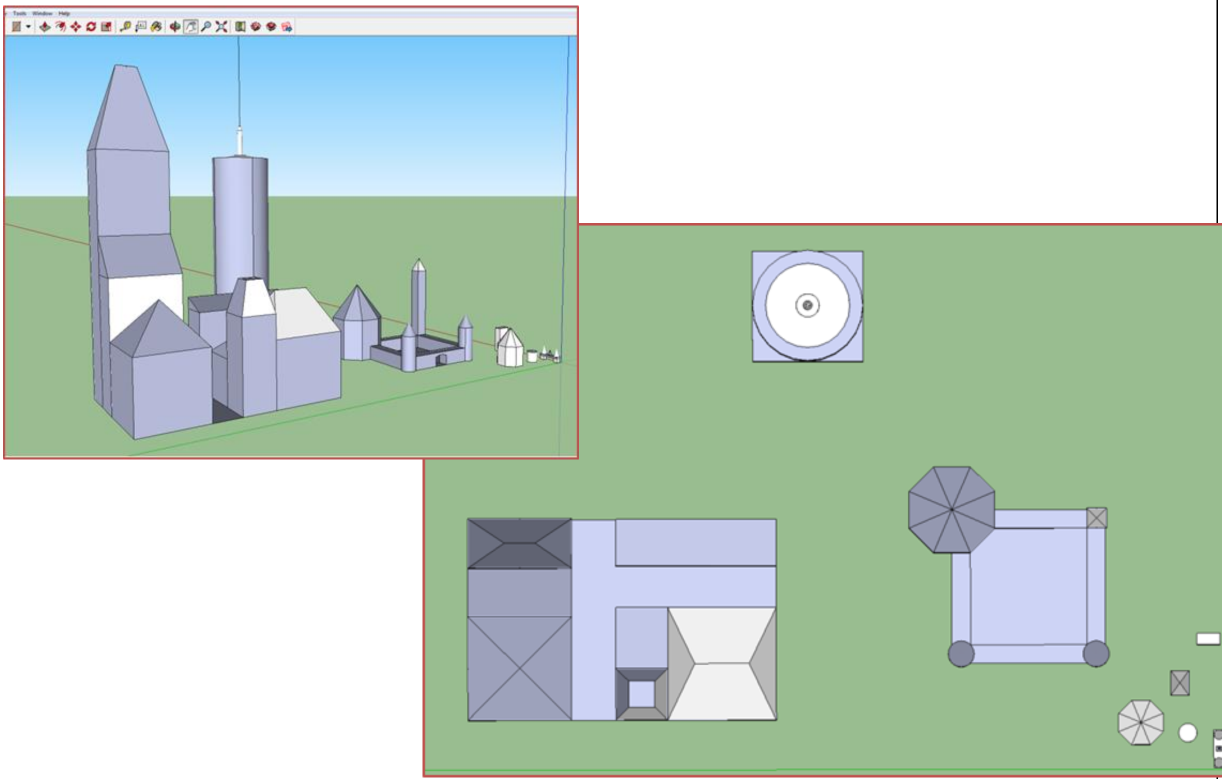


c) Užití programu ***Cabri II – Plus*** (žáci devátých tříd ZŠ Bezručova, Hradec Králové, 2014)





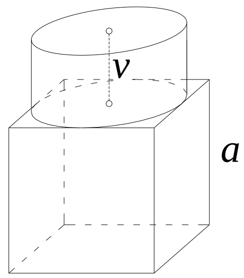
d) Užití programu ***SkechUpMake*** (žáci devátých tříd ZŠ Bezručova, Hradec Králové, 2014)



Očekávaný výstup	**M-9-3-09** Žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti

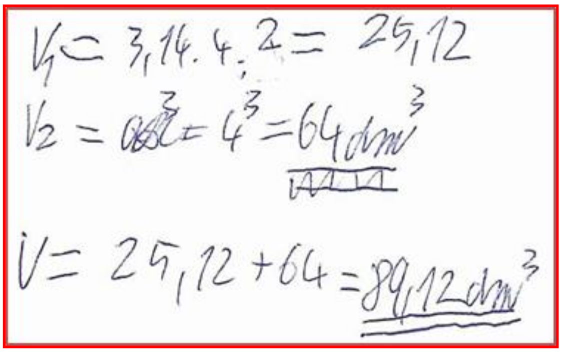
Ilustrativní úloha 11	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

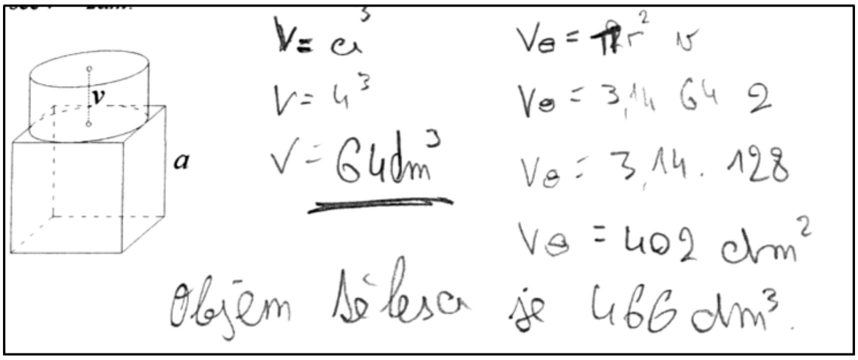
Vypočítej objem tělesa vytvořeného podle obrázku z krychle o hraně *a* = 4 dm a válce o výšce *v* = 2 dm.



Možná řešení s metodickým komentářem

Určujeme objem tělesa složeného ze známých těles – krychle a válce.
Žáci bez potíží vypočítají objem krychle. U objemu válce často využijí špatný vzorec nebo nedokáží správně odvodit poloměr válce a dosazují do správného vzorce špatné hodnoty.





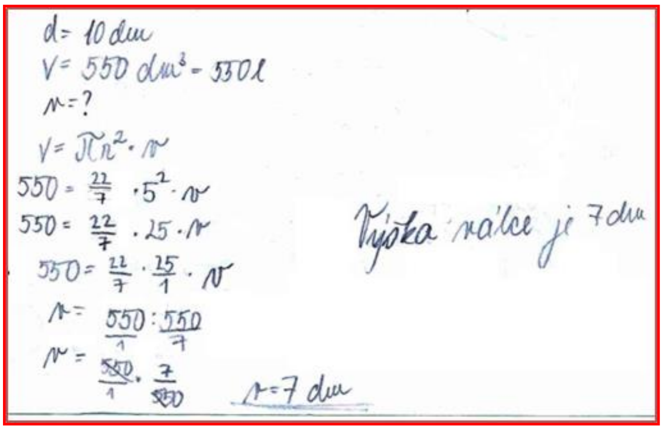
Očekávaný výstup	M-9-3-10 Žák odhaduje a vypočítá objem a povrch těles

Ilustrativní úloha 12	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Jakou výšku musí mít válcový barel, jehož dno má průměr 10 dm, aby se do něj vešlo 550 l vody? (Načrtni, při výpočtu počítej s hodnotou π = 22/7).

Možná řešení s metodickým komentářem

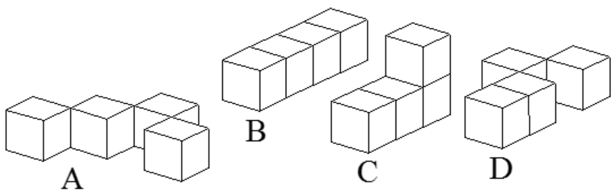
Žáci jsou zvyklí počítat příklady tohoto typu s kalkulačkou, jde nám však o porozumění problematice a o správný postup, nikoli o výpočty. Úloha mívá minimum zcela správných řešení. Žáci buď úlohu neřeší vůbec, nebo využívají špatných vzorců. (Je však rozhodně v jejich možnostech ji vypočítat.)
Při dodržení pokynu o čísle π žáci zjistí, že použití zlomku se „vyplatilo“.
Kreslení obrazů válců je pro ně obtížné, náčrtky dobře vyřešené úlohy nebudeme opravovat, posloužily jako dobrý model.



Očekávaný výstup	M-9-3-10 Žák odhaduje a vypočítá objem a povrch těles

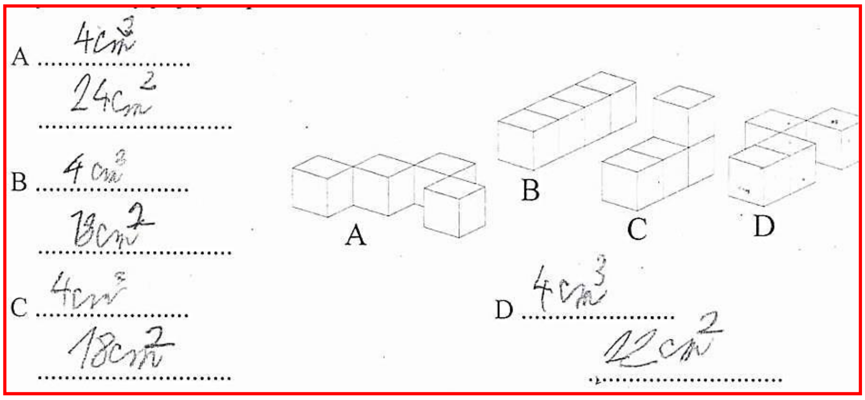
Ilustrativní úloha 13	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Sestavy **A**, **B**, **C**, **D** jsou vytvořené
z jednotkových krychlí o hraně 1 cm.
Jaký je jejich objem?
Jaký je jejich povrch?



Možné řešení s metodickým komentářem

Určujeme povrch a objem sestav vytvořených z jednotkových krychlí. Pomocí čtyři různých sestav zjišťujeme, zda si žák uvědomuje, jaký vliv má sestavení jednotkových krychlí na výpočet povrchu vzniklého tělesa. Řada žáků úlohu nevyřeší. Schází jim strategie, kterou jim můžeme při hodnocení odhalit.

Začneme například sestavou A, která má zachovány všechny stěny krychlí. U dalších sestav si uvědomíme, že každé dvě stýkající se stěny znamenají odečíst obsah 2 čtverců. 	
Očekávaný výstup	M-9-3-10 Žák odhaduje a vypočítá objem a povrch těles

5. Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy

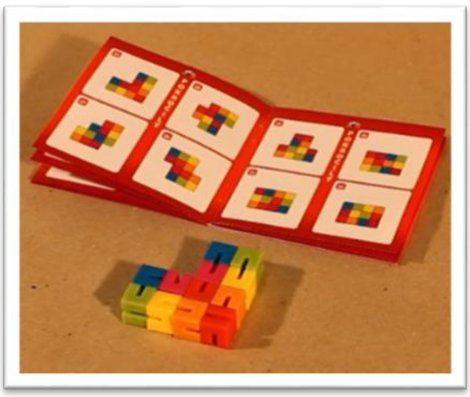
Hana Lišková, Pavel Rezek

RVP ZV: *Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.*

Tematický okruh *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* byl do RVP ZV zařazen s jasným záměrem. Úlohy, které můžeme označit jako nestandardní, nabízejí totiž široké možnosti uplatnění ve školské matematice, ať už na ně pohlížíme z hlediska metod řešení a forem práce nebo z hlediska přesahů do jiných oblastí vzdělávání a života. Nestandardní aplikační úlohy mají mnohdy širší kontext, který navozuje konkrétní problémovou situaci. Při zpracování zadaných údajů musí žáci analyzovat více informací, musí hledat souvislosti a informace dále zpracovávat. Při práci s nestandardními úlohami se vytváří vhodný prostor pro narušení žákovských stereotypů, které se při výuce matematiky často vyskytují a jsou pro další vývoj matematického myšlení žáků škodlivé.

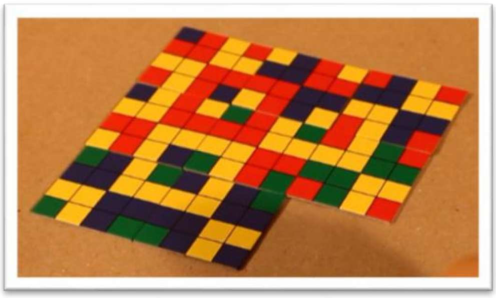
Jedním z typických rysů nestandardních úloh je i více možných variant postupu při jejich řešení. Při výuce je třeba s těmito úlohami pracovat tak, aby se žáci mohli seznámit i s jinými myšlenkovými postupy, než které sami objevili. Pro každého žáka je cennou zkušeností porovnat, jak jeho spolužáci řeší stejný problém. Je velmi důležité, aby žák dovedl samostatně posoudit, které z předložených řešení je zajímavé, srozumitelné, přehledné a v neposlední řadě i efektivní. Je cenné, aby takové řešení žák „přijal za své“. Při prezentaci svých řešení se žáci učí srozumitelně a věcně správně argumentovat, popsat a vysvětlit svou úvahu a postup řešení.

Dalším prostředkem pro vytváření předpokladů k řešení nestandardních úloh je využití didaktických pomůcek, stavebnic a práce s trojrozměrnými tělesy. Geometrické úlohy se v základním vzdělávání objevují velmi často v klasické podobě kvantitativních úloh, kdy žák často pouze použije vzorec, dosadí a kontroluje výsledek. Mezi nestandardní úlohy řadíme takové, které vybízejí k hlubší analýze situace, k hledání optimálního řešení, popřípadě hledání různých řešení. Vhodnou podporou mohou být sady shodných krychlí, stavebnice *JOVO*, *POLYDRON*, *Magformers*, didaktické hry *Pamět 3D*, *Barevný kód*, *Flex* a další.



Nestandardní úlohy lze ve smyslu aplikačních úloh využít v projektové výuce, která umožní větší časový prostor pro zpracování daných informací. Aplikační úlohy vyžadují znalosti z více oblastí matematiky (mnohdy i dalších vzdělávacích oblastí), jsou náročnější z hlediska uvědomování si širších souvislostí. Je třeba, aby se ve školském prostředí takové úlohy staly prostředkem pro upevnění učiva.

S nestandardními úlohami se děti často setkávají mimo školu, v publikacích z oblasti rekreační neboli zábavné matematiky, v dětských časopisech nabízejících různé kvízy, doplňovačky, hlavolamy, úlohy typu Zebra, sudoku, kakuro, algebrogramy apod. Zadání takových úloh využívá a zároveň podporuje oblíbené metody řešení („pátrání“, „experimentování“, „zkoumání“). Mnohdy si dítě vystačí s jednoduchou metodou řešení jakou je metoda „pokus-omyl“. Dítě není za chybné řešení trestáno, naopak nastává situace, kdy má šanci i nadále zkoušet, pátrat, opakovat a používat osvědčené způsoby řešení, odhaluje zákonitosti, principy apod. Tento psychologický efekt způsobuje, že se dítě k takovým úlohám a problémům rádo vrací, jelikož mnohdy zažije jisté řešitelské vzrušení. Bylo by škoda tento efekt nevyužívat také při výuce matematiky, zvlášť když přináší příležitosti k rozvoji matematických dovedností a řešitelských zkušeností. Jmenujme některé typy takových úloh: doplňovačky, křížovky, rébusy, hlavolamy, logické a číselné řady, číselná kouzla, magické a latinské čtverce, kódované obrázky, číselné bingo.



Pokud máme k dispozici některé z kvalitních deskových her, jako je např. Tantrix, Blokus, Continuo, je vhodné se jimi inspirovat a naformulovat netradiční úlohy s jejich oporou.

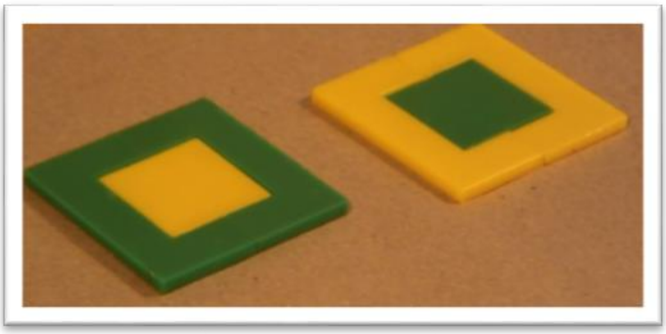
Řešení nestandardních úloh a problémů lze mnohdy využít i k diagnostice úrovně myšlenkových procesů žáků. Učitel může velmi dobře pozorovat, jak žák řeší úlohu bez návodu. Může vysledovat úroveň strategického myšlení žáka, jeho schopnost provádět analýzu a syntézu, využívat analogie, kritický úsudek apod.

V RVP ZV jsou jako příklady nestandardních aplikačních úloh a problémů uvedeny komplexní slovní úlohy z reálného života, logické řady a analogie (číselné i obrázkové), magické čtverce, netradiční geometrické úlohy, úlohy na prostorovou představivost a tzv. logické úlohy. V následujícím textu jsou uvedeny některé další konkrétní typy nestandardních aplikačních úloh:

- problémy diofantovského typu
- úlohy, kde žáci „sesazují“ a doplňují známé informace tak, aby výsledná sdělení byla pravdivá
- úlohy kombinatorické, kde žáci hledají různé varianty pořadí, hledají různé dvojice apod.
- úlohy s využitím „šedesátkového“ převodu, kde žáci zpracovávají časové údaje, popř. pracují s mírou úhlovou
- úlohy grafické.

První stupeň ZŠ

Nestandardními úlohami a problémy na prvním stupni základní školy nerozumíme úlohy složité, ale takové, které jsou pro žáky neobvyklé (jak zadáním, tak způsobem řešení) a jsou vhodné i pro badatelské aktivity. Při řešení takových úloh se snažíme respektovat a ocenit osobitá řešení žáků, pokud jsou správná a vhodně (například doplňujícími otázkami) korigovat u žáků postupy, které nejsou přesné nebo správné. Chyby využíváme jako prostředek k učení. S návrhy řešení, které žáci podávají, pracujeme citlivě, nikoli odmítavě. Právě v těchto situacích je možné žáky významně povzbudit k řešení problémů a posílit tak pozitivní vztah k matematice (na každém řešení se můžeme něco naučit, pochopit, vyjasnit, upřesnit). Naopak necitlivým přístupem můžeme žáky demotivovat, utvrdit je v přesvědčení, že „matematika je jen pro vybrané jedince“.



Jak již bylo zmíněno, do nestandardních aplikačních úloh je třeba zařadit i komplexní úlohy z praktického života, ve kterých jsou provázány různé oblasti matematiky. Důležité však je, aby úlohy zůstaly pro žáky srozumitelné. Výhodné je využívat řetězce gradovaných úloh, kde je obtížnost zvyšována postupně. Slabší žáci mají možnost alespoň část úlohy vyřešit, nadaným jedincům je tímto způsobem předkládána motivující výzva. Při řešení úloh z praxe využíváme konkrétních zkušeností žáků z běžného života i z různých oblastí jejich zájmů (sport, technika, příroda, umění apod.).

Očekávané výstupy tematického okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* jsou pro 1. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematiky a její aplikace do níže uvedených konkrétnějších indikátorů (nastavených na minimální úroveň).

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky
Indikátory	1. žák vyhledá v textu jednoduché úlohy potřebné údaje a vztahy 2. žák volí vhodné postupy pro řešení jednoduché úlohy 3. žák vyhodnotí výsledek úlohy

Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

A) Kolika způsoby může babička malému Toníkovi vyplatit odměnu 20 Kč, má-li pouze mince v hodnotách 5 Kč a 10 Kč?

B) Kolika způsoby může babička malému Toníkovi vyplatit odměnu 20 Kč, má-li pouze mince v hodnotách 2 Kč, 5 Kč a 10 Kč?

C) Kolika způsoby mohl vyplatit šafář kočímu odměnu 38 tolarů, jestliže použil vždy <u>všechny</u> dostupné typy tolarů (tedy dvoutolar, třítolar a pětitolar)?

Možná řešení s metodickým komentářem

Úlohy A) a B) popisují běžnou životní situaci s využitím současných mincí. Ve variantě C) je využit název historického platidla tolar (i když mince některých z uvedených hodnot ve skutečnosti neexistovaly). Při seznamování žáků s tímto typem úloh lze doporučit manipulování s modely mincí nebo jinými vhodnými předměty. Žáci s jejich pomocí vytvářejí skupiny, které odpovídají zadání úlohy.
Žáci většinou řeší tuto úlohu vypsáním všech možností. Někteří využívají záznam, kdy si postupně jednotlivé hodnoty mincí čárkují (zapisují četnost výskytu), někteří volí záznam do tabulek apod. Řešení tohoto typu úloh lze také provést sestavením a následným řešením neurčité (diofantovské) rovnice v oboru přirozených čísel. Tento způsob však není pro 1. stupeň ZŠ nejvhodnější.
Mnohem důležitější je u žáků sledovat jejich osobitý způsob řešení a zprostředkovávat různé způsoby žákovských řešení celé třídě. Učitel by měl vždy vyžadovat po jednotlivci komentář tak, aby způsob jeho řešení (včetně záznamu) byl srozumitelný i ostatním žákům. Je velmi cenné, pokud žáci vidí, že neexistuje jen jeden způsob zpracování údajů z daného textu a pouze jeden formální zápis řešení. Spolužáci většinou netradiční způsob řešení ocení, což motivuje k dalším matematickým aktivitám a posiluje úctu k práci druhých. Pokud žák vidí u spolužáka efektivnější způsob řešení, kterému rozumí, velmi často se stává, že jej využije v obdobných situacích.

Řešení:

A)

V zadání není podmínka, že má babička využít vždy všechny druhy mincí, tedy existují tři následující možnosti, jak odměnu vyplatit:

5 + 5 + 10 = 20

5 + 5 + 5 + 5 = 20

10 + 10 = 20

B)

Pro tři hodnoty mincí existuje šest způsobů, jak vyplatit odměnu. Žáci často sami využijí k přehlednému zápisu všech možností tabulku:

Hodnoty mincí	Počet kusů					
2 Kč	0	0	0	5	5	10
5 Kč	0	2	4	0	2	0
10 Kč	2	1	0	1	0	0

Odměnu lze vyplatit šesti způsoby.

C)

V textu úlohy excelentní obtížnosti se objevuje již nepoužívaná měnová jednotka tolar. Žák nemůže využít při řešení svou běžnou zkušenost. Řešení navíc vyžaduje velkou trpělivost při vypisování všech možností. Je třeba žáky upozornit na nutnost systematického vypisování všech možností, které umožní na nic nezapomenout. Jedna z možností systematického zápisu je zachycena v následující tabulce:

Hodnoty mincí	Počet kusů																	
5 tolarů	6	5	5	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1
3 tolary	2	3	1	2	4	7	5	3	1	8	6	4	2	9	7	5	3	1
2 tolary	1	2	5	6	3	1	4	7	10	2	5	8	11	3	6	9	12	15

Žáci mohou možná řešení vypsat také tímto způsobem:

$6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 38$

$5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 38$

$5 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 38$

atd.

Odměnu lze vyplatit osmnácti způsoby.

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Na ekofarmě děti pozorovaly stříhání ovcí.

A) V jakém pořadí mohla paní Bětka stříhat ovce Kláru, Julii a Vendulu? Vypiš všechny možnosti, v jakém pořadí mohly být stříhány. Kolik je těchto možností?

B) V jakém pořadí mohla paní Bětka stříhat ovce Kláru, Julii, Jóžinu a Vendulu? Vypiš všechny možnosti, v jakém pořadí mohly být stříhány. Kolik je těchto možností?

C) V jakém pořadí mohla paní Bětka stříhat ovce Kláru, Julii, Jóžinu a Vendulu, když Vendula v žádném případě nesmí být ostříhaná jako poslední? Kolik je těchto možností?

Možná řešení s metodickým komentářem

Záznamy hledání všech možností jsou u žáků velmi individuální. Pro usnadnění hledání všech možných variant řešení je vhodné pro žáky 1. stupně ZŠ připravit dostatečné množství kartiček s obrázky jednotlivých ovcí tak, aby mohli všechny možnosti postupně sestavit a přitom kontrolovat, zda už se nějaká sestava neopakuje. Pokud žák nepotřebuje tuto podporu při hledání řešení, je to třeba respektovat a nebránit mu v hledání vlastních cest.

			
KLÁRA	JULIE	VENDULA	JÓŽINA

Všechna možná řešení (při zvoleném označení ovcí K – Klára, J – Julie, Jž –Jóžina, V – Vendula):

A)

K – J – V, K – V – J, J – K – V, J – V – K, V – K – J, V – J – K (6 možností)

B)
K – J – Jž – V, K – J – V – Jž, K – Jž – J – V, K – Jž – V - J, K – V – J – Jž, K – V – Jž – J,
J – K – Jž – V, J – K – V – Jž, J – Jž – K – V, J – Jž – V – K, J – V – K – Jž, J – V – Jž – K,
Jž – K – J – V, Jž – K – V – J, Jž – J – K – V, Jž – J – V – K, Jž – V – K – J, Jž – V – J – K,
V – K – J – Jž, V – K – Jž – J, V – J – K – Jž, V – J – Jž – K, V – Jž - K – J, V – Jž – J – K
(24 možností)

C)
Nejčastěji žáci vyškrtají v předchozí úloze situace s Vendulou na konci.
~~K – J – Jž – V~~, K – J – V – Jž, ~~K – Jž – J – V~~, K – Jž – V - J, K – V – J – Jž, K – V – Jž – J,
~~J – K – Jž – V~~, J – K – V – Jž, ~~J – Jž – K – V~~, J – Jž – V – K, J – V – K – Jž, J – V – Jž – K,
~~Jž – K – J – V~~, Jž – K – V – J, ~~Jž – J – K – V~~, Jž – J – V – K, Jž – V – K – J, Jž – V – J – K,
V – K – J – Jž, V – K – Jž – J, V – J – K – Jž, V – J – Jž – K, V – Jž - K – J, V – Jž – J – K
(18 možností: 24 – 6 = 18)

Zajímavé je pozorovat metody řešení v případě, že řešení situace B) přímo nepředchází řešení C). Při výpisu všech možností musí žák dodržet zadání úlohy a Vendulu nezařazovat na poslední místo.

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	excelentní

A)
a) Je 24. prosince 9 hodin dopoledne. Kolik hodin zbývá do Štědrého večera do 18 hodin, kdy zazvoní zvony a začne se nadělovat?
b) Je 21. prosince 18 hodin večer. Kolik dnů zbývá do Štědrého večera do 18 hodin, kdy zazvoní zvony a začne se nadělovat?
B)
Je 21. prosince 9 hodin dopoledne. Kolik hodin zbývá do Štědrého večera do 18 hodin, kdy zazvoní zvony a začne se nadělovat?

Možná řešení s metodickým komentářem

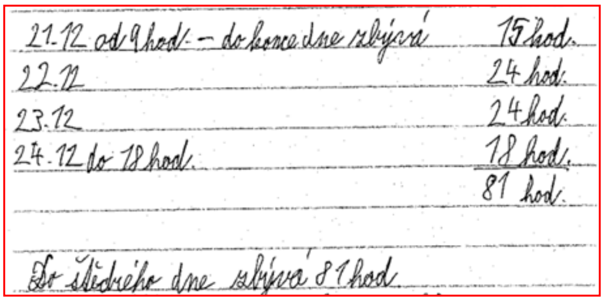
Úloha vede žáky ke správnému zpracování časových údajů a dat. Při řešení někteří využívají i grafické znázornění.

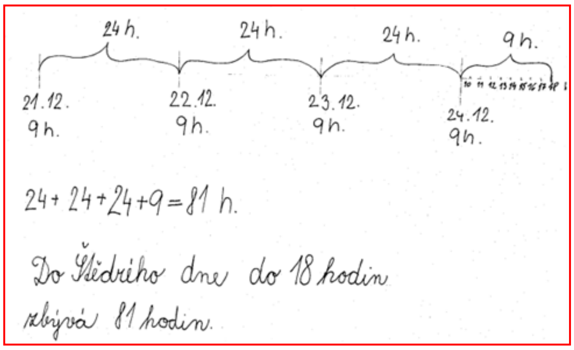
A)
a) Úloha je zadaná v rozmezí jednoho dne, aby byla obtížnost minimální.
Řešení: 18 – 9 = 9.
Do Štědrého večera zbývá 9 hodin.

b) Časový údaj je volen vhodně tak, aby se ve výpočtu nekombinovaly časové jednotky (hodiny a dny). Pracujeme pouze s datem.
Řešení: 24 – 21 = 3.
Do Štědrého večera zbývají 3 dny.

B) V textu se kombinují časové jednotky (je nutný převod dne na hodiny).

Dvě řešení žáků 5. tříd ukazují odlišné přístupy k řešení problému. Při řešení úlohy ve třídě je velmi užitečné zajistit prezentaci různých typů žákovských řešení.





Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

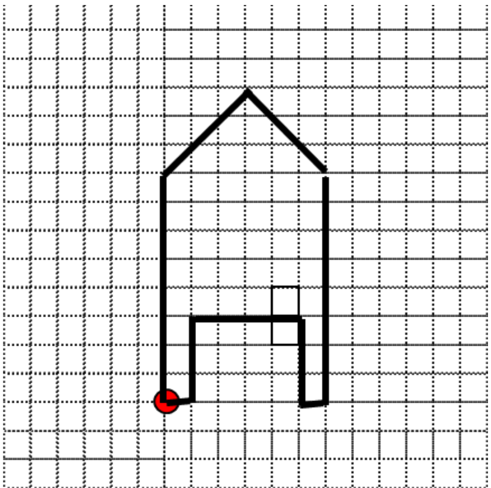
Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Šipkový kód využívá osmi různých šipek, které vyjadřují povolené kresby ve čtvercové síti. Například pokyn 3 ↓ znamená: nakresli „čáru přes 3 čtverečky“ směrem dolů.

A) Ve čtvercové síti vyznač počáteční bod a zakresli útvar podle uvedeného šipkového kódu, útvar pojmenuj:

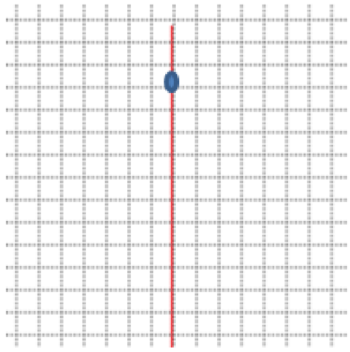
Kód: 3 ↓ 4 → 3 ↑ 4 ←

B) Ve čtvercové síti je zakreslen obrázek městské brány a vyznačen počáteční bod. Zapiš šipkovým kódem, jak obrázek vznikl.



C) Ve čtvercové síti je zvolen počáteční bod. Zakresli útvar podle zadaného šipkového kódu.

Kód: 3↗ 2→ 3↓ 5← 3→ 2↘ 2↓ 1↙ 2← 2↗



Druhou polovinu obrázku vytvoř souměrně dokreslením obrázku vlevo od vyznačené osy souměrnosti.

Možná řešení s metodickým komentářem

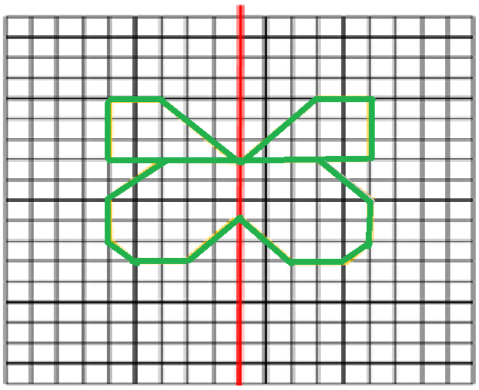
Žáci se učí orientovat v rovině, konkrétně ve čtvercové síti, pracují podle daných pravidel. Upevňují si pojem obvod rovinného útvaru, současně se jedná o propedeutiku souřadnicového systému. Vedlejším efektem je i estetický zážitek, který funguje jako motivace.

A) Výsledkem je obdélník.

B) Šipkový kód, kterým vznikl daný obrázek:

8↑ 3↗ 3↘ 8↓ 1← 3↑ 4← 3↓ 1←

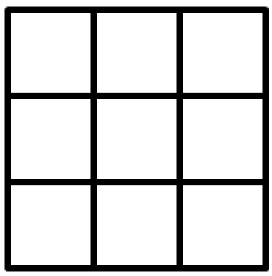
C) Výsledkem je motýl.



Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 5	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Do mřížky 3 x 3 umístěte nabízené symboly tak, aby se v každém řádku a sloupci vyskytoval každý symbol pouze jednou.



Nabídka: ♥ ♠ ♣

Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci se setkávají s úlohou, která má více správných řešení. Mohou si navzájem svá řešení představit a posoudit. Je vhodné vytvořit prostor pro diskusi.
Ukázka jednoho z možných řešení:

♥	♠	♣
♠	♣	♥
♣	♥	♠

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Každý symbol v mřížce zastupuje určité číslo. Symboly nahraďte čísly tak, aby byly splněny součty S v řádcích a sloupcích.

	S = 12		
♥	♥	♠	S = 7
♠	♣	♠	S = 14
♣	♥	♠	S = 13
S = 13		S = 9	

Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci většinou začnou „odtajněním“ trojice ze stejných symbolů. Využijí součet 9 (v posledním řádku) a rozdělí ho na tři části.

♠ = 3.

Ve výpočtech mohou pokračovat ve druhém řádku, druhém sloupci atd.

2	2	3
3	8	3
8	2	3

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Každý symbol zastupuje určité číslo. Zjistěte číselnou hodnotu každého symbolu tak, abyste zajistili správný součet, který je uveden u každého řádku i sloupce. Proveďte kontrolu.

$\Sigma = 21$ $\Sigma = 16$ $\Sigma = 17$ $\Sigma = 18$ $\Sigma = 22$

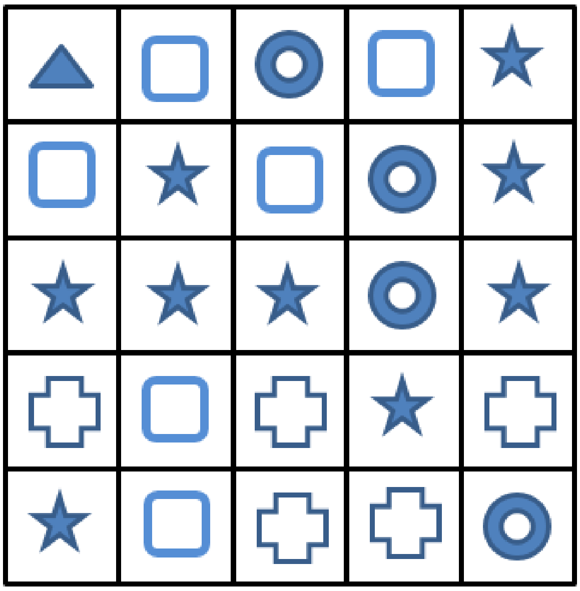
$\Sigma = 19$

$\Sigma = 18$

$\Sigma = 24$

$\Sigma = 16$

$\Sigma = 17$



Možná řešení s metodickým komentářem

Pozorujeme a případně diskutujeme s žáky jejich různé metody řešení. Argumentace a obhajování vlastního řešení má pro poznávací proces všech zúčastněných žáků velký význam. Při řešení se setkáme s metodou porovnávání, s odhady, s metodou „pokus – omyl". Někteří žáci projevují jistou úroveň strategického myšlení (začínají například třetím řádkem, kde se objevuje nejvíce shodných symbolů).

Řešení:

 = 6  = 5  = 4  = 2  = 3

Kontrola:

řádky	sloupce
6 + 2 + 4 + 2 + 5 = 19	6 + 2 + 5 + 3 + 5 = 21
2 + 5 + 2 + 4 + 5 = 18	2 + 5 + 5 + 2 + 2 = 16
5 + 5 + 5 + 4 + 5 = 24	4 + 2 + 5 + 3 + 3 = 17
3 + 2 + 3 + 5 + 3 = 16	2 + 4 + 4 + 5 + 3 = 18
5 + 2 + 3 + 3 + 4 = 17	5 + 5 + 5 + 3 + 4 = 22

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	excelentní

Patrik si před sebe postavil čtyři sklenice a experimentoval. Do první sklenice vložil jednu kuličku, do každé následující sklenice vložil trojnásobek počtu kuliček v předchozí sklenici.

A) Kolik kuliček vložil do druhé, třetí a čtvrté sklenice?
B) Odhadni, v kolikáté sklenici by poprvé bylo více než 200 kuliček. Odhad ověř výpočtem.

Možná řešení s metodickým komentářem

Při řešení úlohy se žáci setkávají se zákonitostmi, které vedou k lepšímu pochopení umocňování. Úloha pomáhá vést žáky k reálným odhadům.

Řešení:
A) 2. sklenice – 3 kuličky, 3. sklenice – 9 kuliček, 4. sklenice – 27 kuliček.

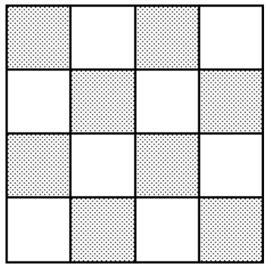
B) V šesté sklenici: $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 9	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Patrikovi se experimentování z minulé úlohy zalíbilo a tak zkusil pokládat fazole na šachovnicovou dlažbu 4 x 4 tak, že na první pole položil jednu fazoli a na každé následující políčko dvojnásobek předchozího počtu. Nestačil se divit.

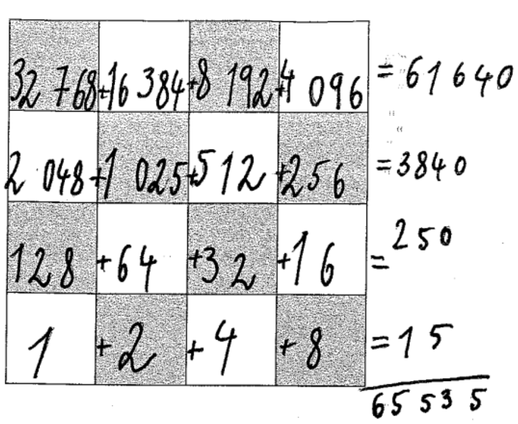
Kolik fazolí by potřeboval, kdyby chtěl tuto dlažbu zaplnit podle daného pravidla?



Možná řešení s metodickým komentářem

Žáky v tomto období fascinuje práce s velkými čísly. Je vhodné zařadit diskusi, zda je reálné tento experiment na předložené šachovnicové dlažbě dokončit, jaká omezení by šachovnice měla mít apod.

Patrik by potřeboval na celou šachovnici zaplněnou podle pravidel 65 535 fazolí.
V uvedeném řešení žák pracuje s mezisoučty.



Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 10	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

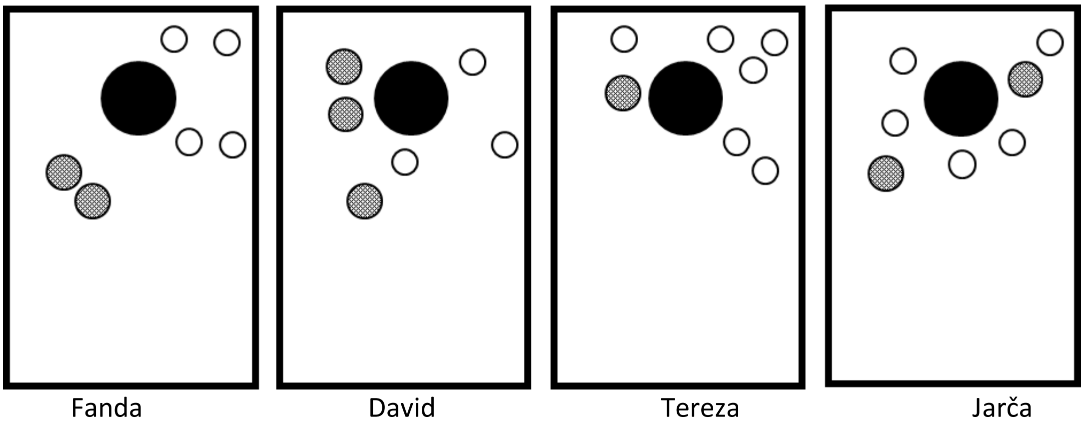
Děti si na dvorku vytvořily důlek a hrály kuličky.
Pravidla hry: za každou malou kuličku v důlku získává hráč 3 body, za velkou kuličku 5 bodů.

A) Zjisti pořadí dětí při hře, jejíž konečný stav „úspěšných“ kuliček je zaznamenán v tabulce.

Jméno	Počet malých kuliček (za 3 body)	Počet velkých kuliček (za 5 bodů)
Radka	8	4
Jiřík	7	5
Klárka	11	2
Ríša	9	3

B) Jaké kuličky „nacvrnkal“ do důlku Jakub, když bylo jeho bodové skóre 28 bodů?

C) Na začátku hry měl každý hráč ze soutěžní čtveřice (Fanda – David – Tereza – Jarča) k dispozici 8 malých a 5 velkých kuliček. Sleduj na obrázku, jaký nastal stav na konci hry u jednotlivých hráčů, a zjisti jejich bodové skóre.



Poznámka:
Schéma ukazuje černý důlek a kuličky, které děti do důlku netrefily. Správně „nacvrnkané“ kuličky jsou v důlku a proto nejsou na obrázku vidět.

Možná řešení s metodickým komentářem

A) Výpočet s výsledkem bodového skóre je zaznamenán v tabulce.
Výsledné pořadí dětí: Jiřík, Radka, Klárka, Ríša.

Jméno	Počet malých kuliček (za 3 body)	Počet velkých kuliček (za 5 bodů)	Počet bodů celkem
Radka	8	4	24 + 20 = 44
Jiřík	7	5	21 + 25 = 46
Klárka	11	2	33 + 10 = 43
Ríša	9	3	27 + 15 = 42

B) Úloha má dvě řešení: $28 = 5 \cdot 5 + 3$ a $28 = 2 \cdot 5 + 6 \cdot 3$

C) Řešení úlohy vyžaduje hlubší analýzu situace a práci se schématem. Někteří žáci dopočítávají kuličky, které ve schématu „chybí“ a jsou tedy v důlku (viz Řešení 1). Někteří pracují s maximálním počtem získaných bodů $8 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 49$ (viz Řešení 2).

Řešení 1

Fanda	$4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 27$
David	$5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 25$
Tereza	$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$
Jarča	$3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 24$

Řešení 2

Fanda	$49 - (4 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = 49 - 22 = 27$
David	$49 - (3 \cdot 3 + 3 \cdot 5) = 49 - 24 = 25$
Tereza	$49 - (6 \cdot 3 + 1 \cdot 5) = 49 - 23 = 26$
Jarča	$49 - (5 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = 49 - 25 = 24$

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Ilustrativní úloha 11	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Honza zaslechl, jak průvodčí ve vlaku vypráví své zážitky z minulé jízdy vlakem:
„Každý druhý vagón měl kupé pro matky s dětmi a každý třetí vagón měl připojení na internet“.
„Na třetí zastávce vystoupila polovina cestujících a nastoupilo 33 lidí. Tím se vlak naplnil na čtyři pětiny původní *posádky*“.

Honza začal přemýšlet:

A) Ve kterém vagónu se nachází kupé pro matky s dětmi, které má i připojení na internet?
B) Kolik cestujících bylo ve vlaku při příjezdu do třetí zastávky?
C) Kolik lidí vystoupilo na třetí zastávce?

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:

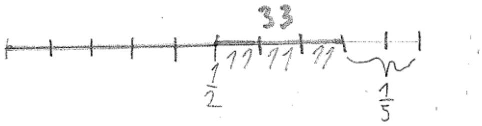
A) Šestý vagón splňuje obě podmínky (popř. dvanáctý, osmnáctý, …).
Žáci si situaci mohou i zakreslit, což často činí. Učí se tak pracovat se schématy. S žáky provedeme diskusi.

B) Do třetí zastávky přijel vlak se 110 cestujícími.

C) Na třetí zastávce vystoupilo 55 cestujících.

Žákovská řešení otázky B a C:

Řešení I



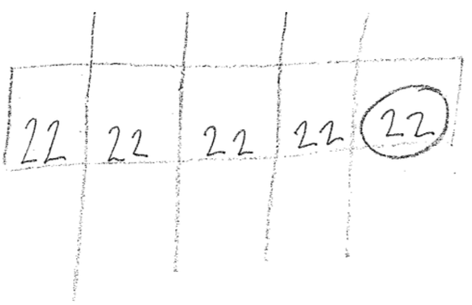
1. vyznačil jsem si $\frac{1}{2}$ na úsečce
2. rozdělil jsem si ji na pětiny
3. vyznačil 33 lidí
4. rozdělil jsem úsečku na desetiny
5. 33 : 3 = 11
6. 10 · 11 = 110 … třetí zastávka
7. 110 : 2 = 55 … vystoupilo

Při příjezdu do 3. zastávky bylo ve vlaku 110 cestujících.
Na 3. zastávce vystoupilo 55 lidí.

Řešení II

80 : 2 = 40 40 + 33 = 73 73 : 4 = 18, zb. 1
90 : 2 = 45 45 + 33 = 78 78 : 4 = 19, zb. 2
100 : 2 = 50 50 + 33 = 83 83 : 4 = 20, zb. 3
110 : 2 = 55 55 + 33 = 88 88 : 4 = 22

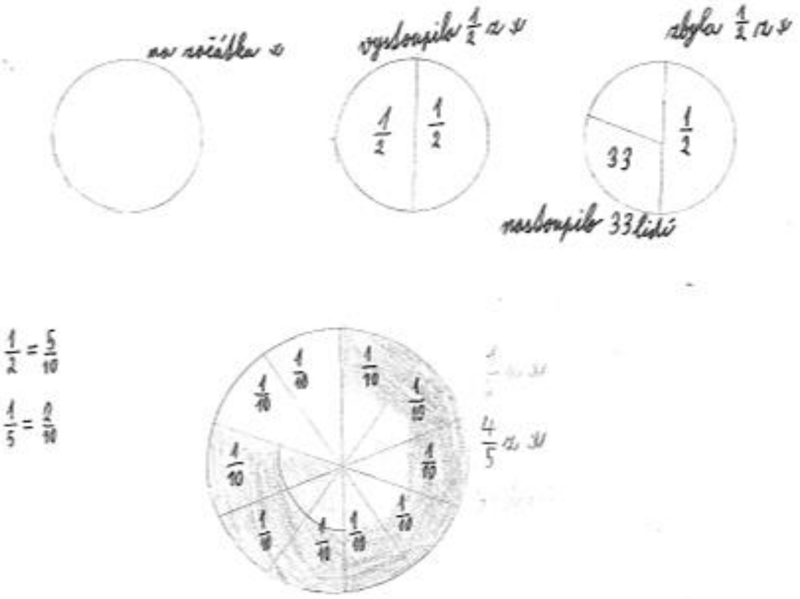
22 · 5 = 110 110 : 2 = 55 Řešení.



Na třetí zastávce vystoupilo 55 lidí a ve vlaku zůstalo 88 lidí.

Řešení III

cestujících x
vystoupilo $\frac{1}{2}$ z x
přistoupilo 33
při odjezdu $\frac{4}{5}$ z x



33 lidí $= \frac{3}{10}$ z x

vystoupila $\frac{1}{2}$ z $x = 110:2 = 55$

$\frac{1}{10}$ z $x = 33:3 = 11$

$x = 10 \cdot 11 = 110$

Při příjezdu do třetí zastávky bylo ve vlaku 110 lidí.

Na třetí zastávce vystoupilo 55 lidí

Řešení IV

Zlomky převedu na desetiny. Před zastávkou vlaku byla ve vlaku celá posádka, to je 10 desetin. Vystoupila polovina, to je 5 desetin. Po nástupu cestujících se vlak naplnil na 4 pětiny, to je 8 desetin.

10 - 5 + ti co nastoupili = 8

33 lidí jsou 3 desetiny a proto 1 desetina je 11 lidí.

10 desetin je 11.10 = 110 lidí. Ve vlaku bylo při příjezdu do třetí zastávky 110 lidí.

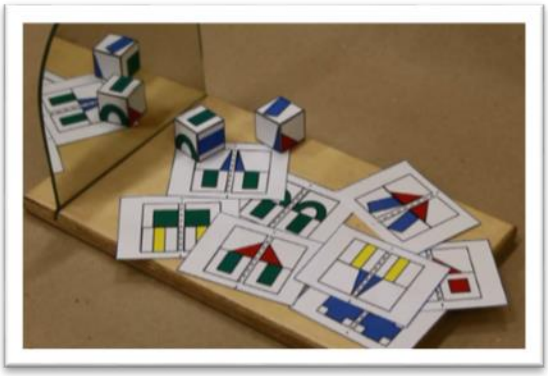
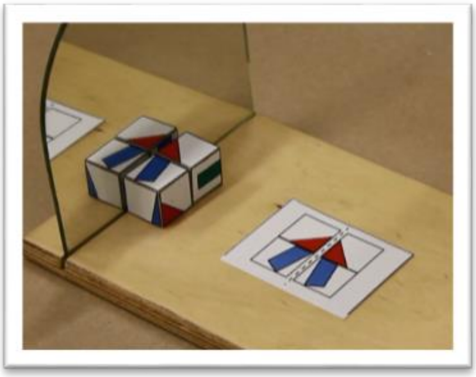
Polovina ze 110 je 55. Na třetí zastávce vystoupilo 55 cestujících.

Očekávaný výstup	M-5-4-01 Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Druhý stupeň ZŠ

Nestandardními úlohami na druhém stupni základní školy jsou úlohy a problémy komplexnější. Ve většině případů umožňují hledání a vnímání souvislostí, objevování a využívání analogií. Je důležité ocenit řešení každého žáka, citlivě korigovat myšlenky a postupy, které nejsou korektní (například doplňujícími otázkami, diskusí ve skupině apod.).

Na rozdíl od 1. stupně ZŠ je do RVP ZV samostatně zařazen očekávaný výstup zaměřený na geometrickou představivost. Zde je prostor pro různé geometrické úlohy a problémy, které využívají netradiční metody řešení (např. modelování situací, projekci, využití perspektivy a stejnolehlosti).

Úspěšnost žáků při řešení prostorových situací je velmi závislé na jejich zkušenostech s řešením těchto úloh. Pokud se žáci s úlohami tohoto typu nesetkali, mívají zvláště v prostorových úlohách velký hendikep. Když se těmto úlohám věnujeme, jsou velmi brzo vidět velké pokroky. Jedná se o nácvik koordinace ruky a oka. Žáci často tvrdí: „Vím, jak to je, ale neumím to nakreslit.“

Mezi nestandardní aplikační úlohy je třeba zařadit také situace, ve kterých jsou provázány různé oblasti matematiky a kde je prostor pro komplexní úlohy z praktického života. Zadání úloh pro druhý stupeň základní školy může být textově náročnější, podstatné však je, aby bylo žákům srozumitelné. Při řešení úloh z praxe využíváme zkušeností dětí z různých oblastí jejich zájmů (sport, technika, kultura apod.) a z dalších vzdělávacích oblastí. Lze využít i uvolněné úlohy z mezinárodních výzkumů PISA a TIMSS.

Očekávané výstupy tematického okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* jsou pro 2. stupeň ZŠ rozpracovány ve Standardech pro základní vzdělávání vzdělávacího oboru Matematiky a její aplikace do níže uvedených konkrétnějších indikátorů (nastavených na minimální úroveň).

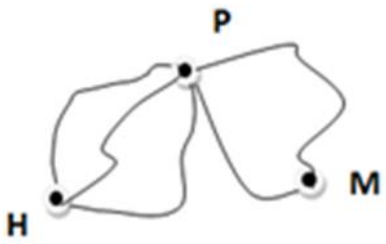
Očekávaný výstup	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací
Indikátory	1. žák vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy 2. žák řeší jednoduchou úlohu 3. žák ověří výsledek úlohy
Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí
Indikátory	1. žák určí reálnou podobu jednoduchého trojrozměrného útvaru z jeho obrazu v rovině 2. žák využívá představu o podobě trojrozměrného útvaru při řešení jednoduchých úloh z běžného života

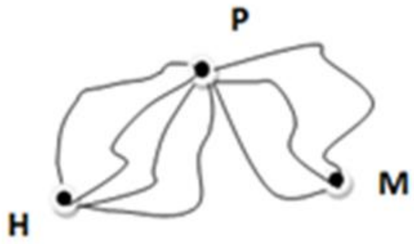
Následující ilustrativní úlohy nepokrývají celou škálu problémů a úloh, které se vztahují k tematickému okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*. Také uvedené postupy řešení u jednotlivých úloh nejsou jediné možné. U některých úloh jsou uvedena autentická žákovská řešení, která vznikla při ověřování ilustrativních úloh v praxi.

Ilustrativní úloha 1	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Hledej a vypiš všechny možnosti cestování z Hloubětína (H) do Mrákotína (M) přes Prosetín (P) v situaci, kdy vedou:

A) tři různé trasy z Hloubětína do Prosetína a dvě trasy z Prosetína do Mrákotína,
B) čtyři různé trasy z Hloubětína do Prosetína a tři trasy z Prosetína do Mrákotína.



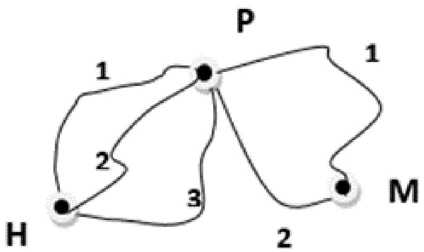


C) Jak by vypadala situace v případě, že by existovalo více než 9 a méně než 12 různých cest z Hloubětína do Mrákotína přes Prosetín za předpokladu, že mezi obcemi H – P a P – M existuje vždy více než jedna cesta. Situaci zakreslete.

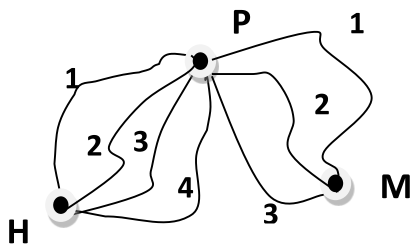
Možná řešení s metodickým komentářem

Při řešení těchto úloh žáci provádí kombinatorický úsudek. Necháme je volně zvolit způsob zaznamenání variant a přehledného řešení (aby bylo srozumitelné i spolužákům). Někteří žáci si pro lepší orientaci volí barevné rozlišení a obtahují jednotlivé úseky cest. Tento způsob je pro mnohé jediným srozumitelným způsobem zaznamenání řešení.
Žákům je možné doporučit „pojmenování“ jednotlivých tras pro možnost přehledného zápisu (viz obrázky).

A)
6 různých cest: **11**, **12**
21, **22**
31, **32**



B)
12 různých cest: **11**, **12**, **13**
21, **22**, **23**
31, **32**, **33**
41, **42**, **43**



S žáky můžeme diskutovat o tom, zda lze počet cest určit i bez vypisování všech možností. Žáci mohou přijít na „pravidlo součinu“ 4 · 3 = 12.

C) Podmínku úlohy splníme, budou-li existovat dvě cesty z H do P a pět z P do M, nebo naopak.
Bude tedy vždy existovat 10 možností cestování z H do M přes P.

Očekávaný výstup	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Ilustrativní úloha 2	Obtížnost	minimální	A) optimální	B) excelentní

Ve výkladní skříni obchodu s elektronikou byla vystavena navigace. Ve výčtu technických údajů bylo uvedeno: displej – 5“, 720x540 pixelů.

A) Kolik měří úhlopříčka této navigace v centimetrech?

B) Jaké jsou rozměry displeje navigace v centimetrech?

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha podporuje větší porozumění některým technickým parametrům moderních technologií.

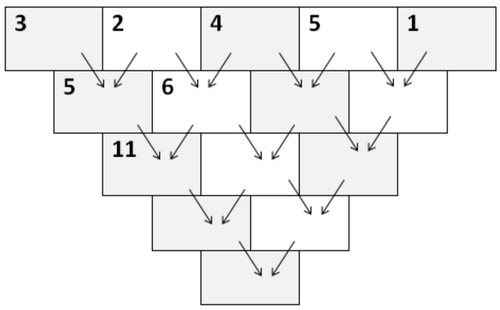
A) Většina žáků asi zná označení 5“. Jedná se o údaj v palcích. Někteří žáci vědí, že jeden palec je přibližně 2,5 cm. Přesnější hodnotu (1“ = 2,54 cm) lze nalézt na internetu za použití různých převodníků fyzikálních veličin (např. www.jednotky.cz). Odtud jednoduchým výpočtem 5 · 2,54 získáme velikost úhlopříčky displeje navigace 12,7 cm.

B) Jestliže budeme předpokládat stejný rozestup pixelů ve vodorovném a svislém směru, pak poměr délek stran displeje odpovídá poměru pixelů. Postupným krácením (např. 720 : 540 = 72 : 54 = 8 : 6 = 4 : 3) získáme základní tvar poměru, tedy 4 : 3.
Jestliže se jedná o obdélník s poměrem stran 4 : 3, tak úhlopříčka bude odpovídat 5 dílům stejného poměru (pythagorejská čísla 3, 4, 5). Úhlopříčka našeho displeje měří 5 palců. Odtud tedy vyplývá, že rozměry displeje jsou 4“ x 3“, což po přepočítání (1“ = 2,54 cm) udává rozměry 10,16 cm x 7,62 cm.

Očekávaný výstup	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Ilustrativní úloha 3	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Na procvičování sčítání se používá i tzv. **sčítací trychtýř.** Je v něm vyplněn první řádek. Žáci postupně doplňují další řádky, kam zapisují součty sousedních políček z předchozího řádku (tak, jak naznačují šipky). Výsledkem je číslo v posledním řádku.



A) K jakému číslu se žáci „dopočítají“, jestliže v prvním řádku sčítacího trychtýře jsou čísla: **1,2; 1,5; 0,8; 2,1; 1,4**?

B) Určete čísla, která byla zapsána v prvním řádku, když na levé straně sčítacího trychtýře jsou čísla: **0,7; 1,6; 4,0; 8,7; 17,6**.

C) V prvním řádku sčítacího trychtýře jsou čísla: **0,5; 0,8; ? ; 0,7; 1,3**. Které číslo je nahrazeno otazníkem, jestliže výsledek sčítacího trychtýře je 16,2?

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha podporuje práci s desetinnými čísly a hledání závislostí při výpočtu.

A) Obyčejným sčítání desetinných čísel snadno doplníme všechna políčka sčítacího trychtýře.

1,2	1,5	0,8	2,1	1,4
2,7	2,3	2,9	3,5	
5	5,2	6,4		
10,2	11,6			
21,8				

B) V této úloze postupujeme pozpátku. Čísla do políček ve vyšších řádcích získáváme odčítáním.
17,6 – 8,7=8,9; 8,7 – 4=4,7; 8,9 – 4,7=4,2; …

0,7	*0,9*	*1,5*	*0,8*	*1,1*
1,6	2,4	2,3	1,9	
4	4,7	4,2		
8,7	8,9			
17,6				

C) Na vyřešení této úlohy použijeme znalost počítání s proměnnou.
Do volného prostředního políčka v 1. řádku si zvolíme proměnnou (např. x).
Do dalších řádků postupně dosazujeme součty výrazů z políček v předchozím řádku. Např. pro 2. řádek: $0{,}5 + 0{,}8 = 1{,}3$; $0{,}8 + x = 0{,}8 + x$;
$x + 0{,}7 = 0{,}7 + x$; $0{,}7 + 1{,}3 = 2$.
V 5. pátém řádku tak do výsledného políčka dosadíme výraz $7{,}8 + 6 \cdot x$.

0,5	0,8	x	0,7	1,3
1,3	0,8+x	0,7+x	2	
2,1+x	1,5+2x	2,7+x		
3,6+3x	4,2+3x			
7,8+6x	=16,2			

Podle zadání je ve výsledném políčku číslo 16,2.
Jestliže tedy zapíšeme rovnost výrazu $7{,}8 + 6 \cdot x$ a čísla 16,2, získáme rovnici $7{,}8 + 6 \cdot x = 16{,}2$. Jejím řešením je $x = 1{,}4$.
V prostředním políčku 1. řádku tedy chybí číslo 1,4.

Očekávaný výstup	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Ilustrativní úloha 4	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Na začátku školního roku kontroluje třídní učitelka údaje o žácích. Při té příležitosti jim vysvětlí význam rodného čísla a některá pravidla pro přidělování: prvních šest číslic udává datum narození (rok, měsíc, den). U žen se k měsíci přičítá hodnota 50. Poslední číslice je doplněna tak, aby celé rodné číslo bylo dělitelné číslem 11.

A) Aleš si kontroloval své rodné číslo 010314/3524. Je toto rodné číslo zapsané ve správném tvaru?
B) Béďa si chtěl své číslo také překontrolovat, zjistil však, že předposlední číslice je v jeho záznamu rozmazaná a nedá se přečíst. Jaká číslice se skrývá pod kaňkou v rodném čísle Bédi? (r.č.: 010521/35[redacted]6)
C) Oba chlapci chtěli uplatnit své znalosti a zjistit z rodného čísla, kdy má jejich kamarádka narozeniny. Bohužel bylo i její rodné číslo částečně nečitelné: 01[redacted]31/3813. Urči neznámé datum.

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha rozšiřuje učivo o dělitelnosti.

A) Jestliže má být rodné číslo zapsáno ve správném tvaru, pak musí být dělitelné číslem 11. Protože výsledek dělení (103 143 524 : 11 = 9 376 684) vyšel bezezbytku, je podmínka dělitelnosti splněna a rodné číslo je ve správném tvaru.

B) Postupným dělením čísla 1052135*x*6 číslem 11 získáme:
1052135*x*6 : 11=95648….
62
71
53
95
7x
y6
Aby bylo číslo ***y6*** dělitelné 11, musí být y = 6 (protože 66 : 11 = 6). Při dělení čísla ***7x*** číslem 11 potřebujeme dostat zbytek 6. Za *x* tedy dosadíme číslo 2, pak 72 : 11 = 6 (zb. 6)
2 je nečitelnou číslicí v rodném čísle.

C) K vyřešení této úlohy je dobré znát pravidlo pro dělitelnost 11 (rozdíl součtu sudých a součtu lichých číslic je dělitelný 11).
1*xy*313813
$(x + 3 + 3 + 1) – (1 + y + 1 + 8 + 3) = (x + 7) – (y + 13)$
Za číslici *x* můžeme dosadit 5 nebo 6. (Protože se jedná o děvče, tak se k dvojčíslí vyjadřující měsíc narození přičítá číslo 50.)
Jestliže za *x* dosadíme číslici 5, pak dostáváme 12 – (*y* + 13). Za *y* nelze dosadit žádné jednociferné číslo, aby byl výsledek dělitelný číslem 11.
Jestliže za *x* dosadíme číslici 6, pak dostáváme 13 – (*y* + 13). Za *y* tedy dosadíme číslici 0, protože 13 – 13 = 0, 0 : 11 = 0 (zb. 0)
Rodné číslo kamarádky je tedy 016031/3813. Odtud už je snadné určit datum narození. Kamarádka se narodila 31. října 2001.

Očekávaný výstup	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Ilustrativní úloha 5	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Sklenice ve tvaru válce je vysoká 14 centimetrů a má průměr 10 centimetrů. Beruška přistála na vnější stěně sklenice v polovině její výšky. Jakou nejkratší dráhu musí urazit, když chce vylézt na hranu sklenice?

Možná řešení s metodickým komentářem

Žáci si musí dráhu berušky na sklenici představit a uvědomit si, že je to polovina výšky sklenice. V tomto jednoduchém případu jsou žáci schopni situaci řešit pouhou vizuální představou.
Řešení: beruška ujde dráhu 7 cm.

Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Ilustrativní úloha 6	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Dvě berušky přistály proti sobě na vnější stěně sklenice ve tvaru válce. Obě jsou v polovině výšky sklenice. Sklenice je vysoká 14 centimetrů a má průměr 10 centimetrů. Jakou nejkratší dráhu musí urazit jedna beruška, když se chce dostat ke své kamarádce, která zůstává na místě.

Možná řešení s metodickým komentářem

Nejkratší dráha berušky se rovná polovině obvodu kruhové podstavy. Někteří žáci to ihned „vidí“, někteří jsou schopni dráhu ukázat na sklenici nebo na modelu válce, jiní si situaci zakreslí do rozloženého pláště válce. Učitel může dobře sledovat úroveň prostorové představivosti žáků.

Řešení:

$s = (2\pi \cdot r) : 2 = \pi \cdot r$

$s = \pi \cdot 5 \doteq 15{,}7$

Beruška ujde dráhu 15,7 centimetrů.

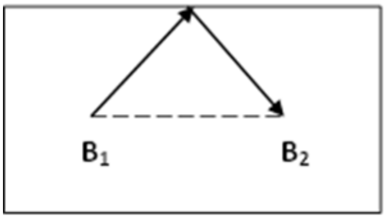
Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Ilustrativní úloha 7	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Dvě berušky přistály proti sobě na sklenici, jedna zevnitř a druhé zvenčí (viz obr.). Sklenice tvaru válce je vysoká 14 centimetrů a má průměr 10 centimetrů. Obě berušky jsou v polovině výšky sklenice. Jakou nejkratší dráhu musí urazit jedna beruška, když se chce dostat ke své kamarádce, která zůstává na místě?

Možná řešení s metodickým komentářem

Vzhledem k tomu, že je každá beruška na jiné stěně sklenice (vně a uvnitř), musí beruška za svou kamarádkou přejít přes okraj sklenice. Nejkratší cestu však netvoří následující úseky: vzhůru na hranu sklenice, dolů do poloviny výšky a po polovině obvodu sklenice. Beruška se musí vydat „šikmo vzhůru“ (viz obr.)

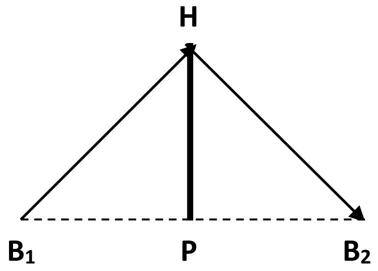


Aby vzdálenost byla minimální, musí beruška přejít přes okraj v bodě, který je stejně vzdálen od bodu B_1 i B_2.
(Tuto skutečnost lze dokázat pomocí osové souměrnosti.)

Výpočet (využívá Pythagorovu větu):

s – polovina obvodu sklenice
t – délka hledané trasy berušky

$$|PB_2| = \frac{s}{2} = \frac{15{,}7}{2}$$
$$|PB_2| = 7{,}85$$
$$|PH| = 7$$
$$|HB_2| \doteq \sqrt{7^2 + 7{,}85^2} \doteq \sqrt{110{,}6} \doteq 10{,}5$$
$$|HB_1| = |HB_2|$$
$$t = |HB_1| + |HB_2|$$
$$t = 2 \cdot |HB_2| \doteq 21$$

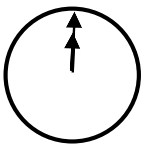


Beruška projde trasu, která má délku přibližně 21 centimetrů.

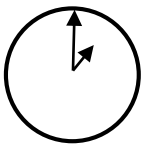
Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

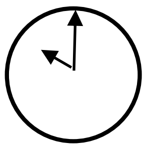
Adamův otec odcestoval do australského Sydney na služební cestu a je s Adamem, který zůstal v České republice, v kontaktu přes chat. Otec může chatovat kdykoliv, kromě doby, kdy spí (23:00 až 6:00 místního času). Adam nemůže chatovat v době vyučování (8:00 až 12:00, 13:00 až 16:00) a v noci, když spí (21:00 až 7:00 místního času). Adam v přehledu časových pásem zjistil:



Greenwich 24:00 (půlnoc)



Praha 1:00 (ráno)



Sydney 10:00 (dopoledne)

A) Zastihne Adam otce, když bude chatovat v období oběda?

B) Najdi časový interval, kdy není vhodné, aby Adam chatoval.

C) Může se matka k Adamovi při chatování přidat, když odchází do práce v 6:30 a vrací se v 16:00 místního času?
Pokud ano, v kolik hodin budou chatovat? Pokud ne, jak lze situaci řešit?

Možná řešení s metodickým komentářem

Abychom mohli časové údaje z České republiky porovnávat s údaji v Sydney, musíme k nim přičíst devět hodin.

A) Adam má oběd od 12 do 13 hodin. V tu dobu je v Sydney 21-22 hodin. Protože otec chodí spát ve 23 hodin, mohou chatovat celou hodinu.

B) Otec spí od 23 hodin do 6. To odpovídá v České republice intervalu 14-21. V tuto dobu není vhodné, aby Adam s otcem chatoval.

C) Před odchodem matky do práce Adam spí, po příchodu matky z práce spí otec v Sydney. Když otec v Sydney vstává, jde spát Adam. Nenajdeme časový úsek, kdy je možné chatování matky, otce i Adama. Jediná možnost je o víkendu, nebo když půjde Adam později spát, případně když otec dřív vstane.

Situaci lze graficky zakreslit. Mezi časovými přímkami Adama a otce bude časový rozdíl 9 hodin.

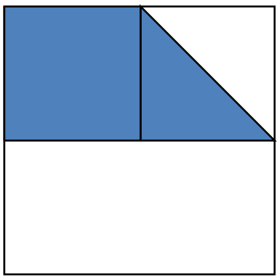
Očekávaný výstup	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

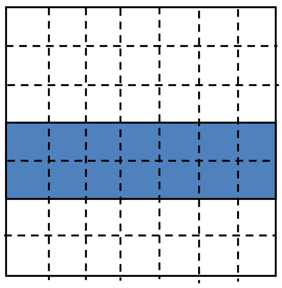
Ilustrativní úloha 9	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

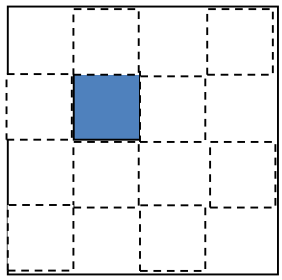
Pan Štědrý zanechal svým pěti dědicům čtvercovou zahradu s dřevěnou stavbou. Na obrázku znázorňuje velký čtverec zahradu a modrý útvar stavbu. V závěti pan Štědrý uvedl, že dědicové mají využívat stavení společně a zahradu si mají rozdělit rovným dílem. Všechny díly mají mít stejný obsah i tvar.

Jak si dědicové zahradu rozparcelovali (bez ohledu na přístupové cesty ke stavbě)?

Vypočti plochu zděděných parcel v případě, že rozměr původní celé parcely je 12 x 12 metrů.

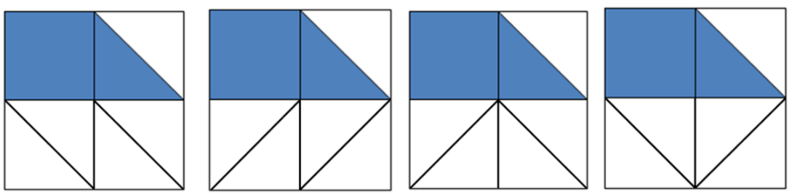
A) 

B) 

C) 

Možná řešení s metodickým komentářem

A) Řešení pro pět dědiců spočívá v rozdělení plochy na pravoúhlé trojúhelníky. Je třeba si uvědomit, že bílá nezastavěná plocha se snadno rozdělí na pět shodných trojúhelníků (půlením čtverců). Různá řešení závisí na volbě dělících úhlopříček.



$S = 12 \cdot 12 = 144$

$S_D = 144 : 8 = 18$

Plocha (výměra) každého zděděného pozemku je 18 m^2.

B)

Zkušenosti ukazují, že členění plochy na shodné obdélníky není pro žáky přirozené.

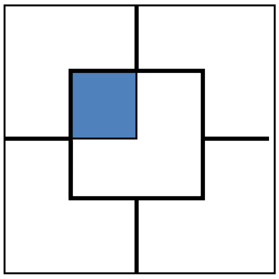
$S_D = 144 : 7 = 20{,}57$

Plocha (výměra) každého zděděného pozemku je přibližně 20,6 m^2.

C)
V tomto případu rozdělení zahrady vyžaduje velkou představivost. Tvar jednotlivých dílčích zděděných částí je nekonvexní.

$$S_D = 144 \cdot \frac{3}{16} = 27$$

Plocha (výměra) každého zděného pozemku je 27 m^2.

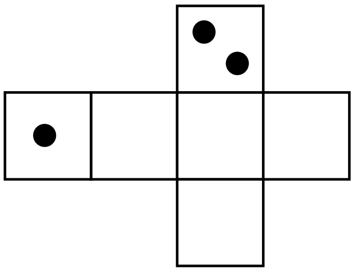


Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

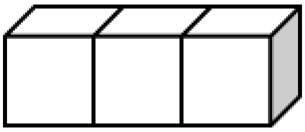
Ilustrativní úloha 10	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Každá hrací kostka musí splnit pravidlo: celkový počet ok na protilehlých stěnách je vždy sedm.

A) Doplň do sítě krychle počet ok tak, aby po složení vznikla hrací kostka splňující uvedené pravidlo.

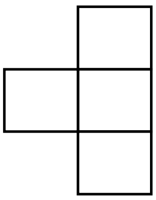


B) Zjistěte, jaký maximální počet ok bude vidět na tělese, které slepíme ze tří hracích kostek (viz obr.)

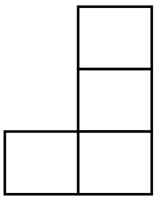


C) Vyber z nabídky stavbu, jejíž nárys (N – pohled zepředu), půdorys (P – pohled shora) a bokorys (B – pohled z levé strany) je na obrázku.

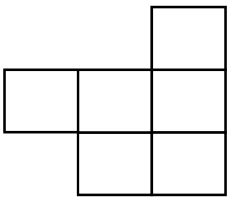
N



P

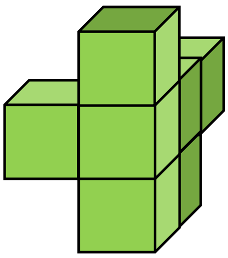


B

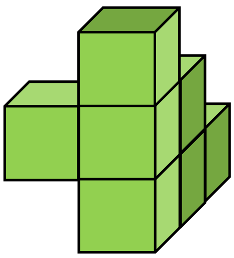


Nabídka:

A

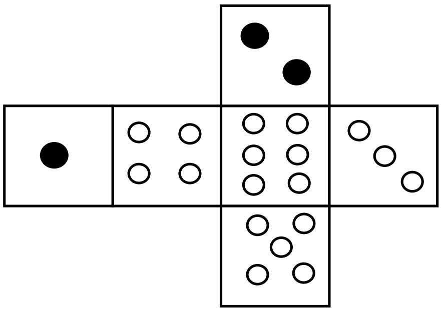


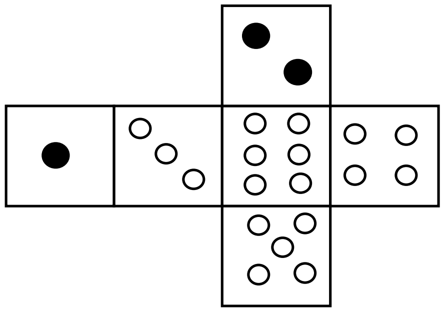
B



Možná řešení s metodickým komentářem

A) Žáci využívají svoji prostorovou představivost. Sledujeme, jestli žáci zjistí více možností řešení, zařadíme diskusi řešení. Úlohy s hracími kostkami nabízejí mnoho různých alternativ zadání.





B) Úvaha žáků by měla směřovat k odhalení nutného zakrytí 7 ok střední hrací kostky. Aby byl vidět maximální počet ok, obě krajní hrací kostky přiložíme stěnou s jedním okem.
Celkový počet ok na třech kostkách je $3 \cdot 21 = 63$.
Počet skrytých ok je $2 \cdot 1 + 7 = 9$.
Maximální počet viditelných ok je $63 - 9 = 54$.

C) Žáci při řešení úlohy využívají prostorovou představivost. Pokud žáci obdobné cvičení řeší poprvé, nejsou někteří z nich schopni pracovat pouze s představou a mají potřebu využít reálných krychlí. Při opakování takovýchto prostorových cvičení se dovednosti žáků velmi rychle zlepšují. Největší problém mají žáci s vnímáním bokorysu, je vhodné tento pohled na těleso procvičit.
Odpovídající těleso je označeno A.

Poznámka: Úloha nabízí variantu zadání bez nabídky tvaru tělesa (A, B).

Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Ilustrativní úloha 11	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Na chodbě školy visí hodiny. Malá ručička měří 12 cm, velká ručička měří 18 cm.

A) Jaký úhel svírají ručičky v 6 hodin, v 9 hodin, v 10 hodin?

B) Kolikrát větší vzdálenost uběhne koncový bod velké ručičky než koncový bod malé ručičky od 6 hodin do 12 hodin?

C) Hodiny jsou porouchané a za každou hodinu se o 4 minuty opozdí. V 8 hodin ráno seřídí pan školník hodiny na přesný čas. Žák Pepík se nemůže dočkat oběda, a tak sleduje svoje hodinky, které ukazují správný čas. Ty ukazují 11 hodin 30 minut. Jak dlouho bude muset Pepík ještě čekat, než budou i školní hodiny ukazovat 11 hodin a 30 minut a bude zvonit na polední přestávku?

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha podporuje představivost v rovině a práci s velikostí úhlu

A) V 6 hodin svírají ručičky úhel **180°**, v 9 hodin jsou k sobě ručičky hodin navzájem kolmé – svírají úhel **90°**. Jestliže kruh rozdělíme na 12 stejných kruhových výsečí, je velikost středového úhlu výseče 360° : 12 = 30°. V 10 hodin ručičky ohraničují dvě kruhové výseče vedle sebe. V 10 hodin svírají ručičky úhel **60°**.

B) Koncový bod malé ručičky opíše od 6 hodin do 12 hodin půlkružnici s poloměrem 12 cm. Využijeme vztah pro výpočet poloviny obvodu kruhu: $o = \pi r$. Po dosazení získáme přibližnou hodnotu **37,68 cm**.
Koncový bod velké ručičky opíše od 6 hodin do 12 hodin 6 celých kružnic s poloměrem 18 cm. Po dosazení získáme přibližnou hodnotu **678,24 cm**.
Nyní už lze jednoduše vypočítat, kolikrát větší vzdálenost uběhne koncový bod velké ručičky, než koncový bod malé ručičky 678,24 : 37,68 **= 18**.
Od 6 hodin do 12 hodin uběhne koncový bod velké ručičky 18 krát větší vzdálenost než koncový bod malé ručičky našich hodin.

C) Zatímco na hodinách, které ukazují správný čas, uběhne 60 minut, na porouchaných hodinách uběhne pouze 56 minut. Od 8 hodin do 11 hodin a 30 minut je 210 minut. Kolik minut tedy uplyne na správných hodinách, než na porouchaných uplyne 210 minut? Například pomocí trojčlenky dopočítáme: $\frac{60}{56} \cdot 210 = 225$.
225 – 210 = 15
Pepík si tedy bude muset počkat ještě 15 minut.

Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Ilustrativní úloha 12	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

A) Pan Novák si půjčí od banky 20 tisíc Kč na smlouvu s roční úrokovou sazbou 9 %. Jakou částku musí mít po roce připravenou na splacení půjčky?
B) Pan Novák si uložil do banky 150 tisíc na termínovaný vklad s roční úrokovou sazbou 1,6 % na dva roky. Kolik mu banka vyplatí za dva roky, jestliže úrok podléhá 15 % dani?
C) Pan Novák bude potřebovat za 1 rok částku 200 tisíc Kč. Jakou částku musí uložit na termínovaný vklad s roční úrokovou sazbou 1,5 % (úrok podléhá 15 % dani)?

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha slouží k rozvoji finanční gramotnosti.

A) Půjčka … 20 000 Kč
úrok … 9 % z 20 000 Kč = 0,09 · 20 000 Kč = 1 800 Kč
částka ke splacení … 20 000 Kč + 1 800 Kč = 21 800 Kč
Pan Novák musí splatit 21 800 Kč.

B) Vklad … 150 000 Kč
úrok … 1,6 % ze 150 000 Kč = 2 400 Kč
úrok za 2 roky … 2 · 2 400 Kč = 4 800 Kč
daň z úroku … 15 % ze 4 800 Kč = 0,15 · 4 800 Kč = 720 Kč
úrok po zdanění … 4 800 Kč – 720 Kč = 4 080 Kč
celková částka 150 000 Kč + 4 080 Kč = 154 080 Kč
Banka panu Novákovi po 2 letech vyplatí 154 080 Kč.

C) Vklad … $\boldsymbol{x}$ Kč
úrok … 1,5 % z $\boldsymbol{x}$ Kč = 0,015 · $\boldsymbol{x}$ Kč
daň z úroku … 15 % z 0,015 · $\boldsymbol{x}$ Kč = 0,15 · 0,015 · $\boldsymbol{x}$ Kč = 0,002 25 · $\boldsymbol{x}$ Kč

úrok po zdanění … 0,015 · ***x*** Kč – 0,002 25 · ***x*** Kč = 0,012 75 · ***x*** Kč
celková částka … ***x*** Kč + 0,012 75 · ***x*** Kč = 1,012 75 · ***x*** Kč což má být 200 000 Kč

1,012 75 · ***x*** Kč = 200 000 Kč
x = 200 000 Kč : 1,012 75
x = 197 482 Kč
Pan Novák musí uložit na termínovaný vklad 197 482 Kč, aby si po jednom roce mohl vyzvednout i po zdanění 200 tisíc Kč.

Očekávaný výstup	M-9-4-01 Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Ilustrativní úloha 13	Obtížnost	A) minimální	B) optimální	C) excelentní

Paní Nováková má plech na pečení o rozměrech 32x40cm. Při pečení na vánoce vykrajuje z těsta kolečka o průměru 3 cm a dává je na plech pod sebe do stejně dlouhých řad. Protože se kolečka při pečení trochu roztáhnou, musí počítat s mezerou tak, aby se těsto mohlo pečením roztáhnout o 0,5cm na každou stranu.

A) Kolik koleček se vejde paní Novákové na jeden plech?
B) Kolik procent plochy plechu je pokryto těstem před pečením?
C) Najdi efektivnější rozmístění koleček na plechu. Své řešení zdůvodni.

Možná řešení s metodickým komentářem

Úloha podporuje představivost v rovině.

A) Kolečko z těsta o průměru 3cm se může pečením roztáhnout o 0,5cm na každou stranu. Středy těchto koleček umísťujeme na plech tak, jako kdybychom na plech pokládali do řad kolečka o průměru 4 cm a kolečka se navzájem dotýkala. Na plech s rozměry 32 x 40 cm se nám vejde 8 koleček do jedné řady. Řad bude 10.
Na plech se tedy vejde 80 koleček.

B) Plech má tvar obdélníku.
$S_{\text{plechu}} = a \cdot b$
$S_{\text{plechu}} = 32 \cdot 40\ \text{cm}^2 = 1\,280\ \text{cm}^2$

Jedno kolečko těsta má před pečením průměr 3 cm. Jeho poloměr je tedy 1,5 cm. Plochu vypočítáme dosazením do vztahu:
$S_{\text{kolečka}} = \pi \cdot r^2\ (\text{cm}^2)$
$S_{\text{kolečka}} = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2\ \text{cm}^2 = 7{,}065\ \text{cm}^2$
Na plechu je 80 koleček, plocha těsta na plechu je tedy 80 · 7,065 cm² = 565,2 cm². Pokrytí plechu těstem už tedy dopočítáme například trojčlenkou.
100 %....................1 280 cm²
x %..........................565,2 cm²
$$x = 100 \cdot \frac{565{,}2}{1280} = 44{,}2\%$$
Těsto pokrývá přibližně 44,2% plochy plechu.

C) Pro efektivnější využití plochy plechu můžeme kolečka rovnat následujícím způsobem:
Na delší stranu plechu vyrovnáme 10 koleček. V další řadě se o 1/2 kolečka posuneme. Do této řady se vejde jen devět koleček. Další řada bude opět 10 koleček atd. Jednotlivé řady tak budou

	blíž. Středy 3 sousedních koleček tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Vzdálenost přímek, které pomyslně proložíme středy dvou sousedních řad, je rovna výšce v tomto rovnostranném trojúhelníku se stranou 4 cm. Tuto výšku dopočítáme pomocí Pythagorovy věty: $4^2 = 2^2 + v^2$ $16 = 4 + v^2$ $v^2 = 16 – 4$ $v^2 = 12$ $v = 3{,}46$ cm. Pomyslná přímka proložená středy koleček 1. řady je od kraje plechu vzdálena 2 cm. Pomyslná přímka proložená středy 2. řady koleček je od první vzdálena 3,46cm, další opět 3,46cm atd. Tímto způsobem se nám vejde 9 řad 2 + 3,46 + 3,46 + 3,46 + 3,46 + 3,46 + 3,46 + 3,46 + 3,46 + 2 = 31,68 cm Koleček tedy bude 10 + 9 + 10 + 9 + 10 + 9 + 10 + 9 + 10 = 86 Na plech se vejde maximálně 86 koleček.
Očekávaný výstup	M-9-4-02 Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

6. Žáci se speciálními vzdělávacími potřebami

Růžena Blažková

Žáci se speciálními poruchami učení v matematice

V rámci společné výuky na základní škole se setkáváme se žáky, u kterých pozorujeme níže uvedené specifické vzdělávací potřeby v matematice.

- Žáci s diagnostikovanou specifickou poruchou učení – dyskalkulií, jejichž úroveň rozumových schopností je v rámci průměru až nadprůměru, ve většině předmětů dosahují výsledků velmi dobrých až výborných, jen v matematice mají problémy. Mají velkou snahu své problémy řešit, učí se rádi a svědomitě se připravují na výuku. Zpravidla jsou schopni vypracovat si vlastní postupy práce, které eliminují jejich poruchu. Pro tyto žáky se pro práci v hodinách matematiky připravuje individuální vzdělávací plán. Žáci s dyskalkulií zpravidla nežádají úlevy, ale hledají pomoc při řešení jejich problému, protože se chtějí učit a něčemu naučit. Jsou schopni vystudovat vysokou školu i technického nebo přírodovědného zaměření.
- Žáci s diagnostikovanými poruchami dyslexie nebo dysgrafie – tyto poruchy ovlivňují výkony žáka v matematice a učitel matematiky by k nim měl přihlížet. Ve všech ostatních předmětech mohou dosahovat průměrných až nadprůměrných výsledků.
- Žáci s několika diagnostikovanými poruchami učení – mají problémy se čtením, psaním, počítáním. Téměř ve všech předmětech mají individuální vzdělávací plán. Práce s nimi je pro učitele náročná, neboť vyžadují neustálou pomoc.
- Žáci s rozumovými schopnostmi v pásmu dolní hranice průměru – nemají diagnostikované specifické poruchy učení, ve všech předmětech však dosahují velmi slabých výsledků.
- Nadaní žáci se souběžnou specifickou poruchou učení (např. matematicky nadaný žák se souběžnou dyslexií nebo dysgrafií, jazykově nadaný žák se souběžnou dyskalkulií) – je třeba postupovat citlivě, aby jejich nadání nebylo poruchou překryto.

Základním problémem výuky školské matematiky a učitele je, jak o všechny tyto skupiny žáků pečovat, aby se všichni mohli rozvíjet podle svých schopností na maximální možné úrovni.

Vzájemné ovlivňování jednotlivých speciálních poruch učení

Uvádíme specifické poruchy učení, které jsou v prostředí České republiky sledované: dyslexie, dysgrafie, dysortografie, dyskalkulie, dysmúzie, dyspinxie, dyspraxie. Uvedené poruchy učení se navzájem prolínají, ovlivňují a všechny mají vliv na úspěšnost či neúspěšnost žáka v matematice.

Dyslexie je porucha čtení a postihuje rychlost čtení, správnost čtení a porozumění čtenému textu. Pokud má žák diagnostikovanou dyslexii, neumí číst s porozuměním zadání matematických úloh. Těmto žákům činí problémy slovní a aplikační úlohy. Někteří žáci neumí číst ani matematický symbolický jazyk a nerozumí matematickým zápisům. Žáci některá slova, zejména delší, čtou s obtížemi, některým spojením vůbec nerozumí. Např. ve vyjádření „koupím pět jogurtů po deseti korunách“ nechápou význam „po“. Učitel matematiky nemůže říci, že dyslexie žáka jej nezajímá, protože právě nepochopení čteného textu může vést k chybám v matematice.

Žákům s diagnostikovanou dyslexií můžeme pomoci např. tak, že zadáváme slovní úlohy prostřednictvím obrázků nebo necháme žáky k příkladu formulovat slovní úlohu, nebo tvořit slovní úlohy k daným číslům. Texty by měly být stručné, používané termíny žákům srozumitelné a náměty úloh by měly být vybírané z důvěrně známého blízkého okolí žáka.

Konkrétní projevy
• Neschopnost číst s porozuměním jakýkoliv text, nezvládnutí komunikace v oblasti čtení matematického textu – *např. žáci po přečtení zadání úlohy uvádí, že tomu nerozumí, avšak nedokáží formulovat přesněji, čemu nerozumí.*

- Nezvládnutí komunikace verbální a verbálně symbolické, neschopnost formulovat myšlenku slovy – *žáci nedokáží vyjádřit slovy matematický zápis.*
- Nezvládnutí přepisu slovní úlohy do symbolického matematického jazyka (matematizace reálné situace) – *žáci neumí z textu slovní úlohy zapsat příklad nebo rovnici*.

Dysgrafie je porucha, která postihuje úpravu písemného projevu, osvojování si jednotlivých písmen a znaků, spojení hláska – písmeno (číslo – číslice). Žák, který má diagnostikovanou dysgrafii, má problémy se zápisem číslic, zápisem čísel v poziční desítkové soustavě, zápisem čísel v písemných algoritmech apod. To má velký vliv na jeho výkony v matematice. Žák má obtíže v diferenciaci cifer, zaměňuje číslice tvarově podobné (např. 6 a 9, 3 a 8, 2 a 3), číslice jednostranně orientované (např. 3, 5, 6, 7) píše naopak. Jeho písmo je neúhledné, zápisy neupravené. Nedokáže vyslovené číslo zapsat (to jej velmi omezuje např. při psaní diktovaných pětiminutovek). V matematice se u něj mohou vyskytovat chyby, které vyplývají ze špatných zápisů, nikoliv z neznalosti matematického učiva.

Žákům s dysgrafií můžeme pomoci tak, že k zápisu čísel používají čtverečkované sešity s modulem 0,5 cm, případně mohou k psaní využít počítač. Neustálá nápodoba číslic, které žák zapisuje špatně, a různé mnemotechnické pomůcky (např. modelování číslic z ohebného drátu) přispívají k postupnému zlepšení. Vyžaduje to velkou trpělivost od učitele i rodičů. V žádném případě by žák za tyto chyby neměl být hodnocen horší známkou, případně trestán.

Konkrétní projevy
• Žáci neporozumí různým typům záznamů a obrazových materiálů. • Žáci mají problémy s pravolevou orientací. • Žáci mají problémy se psaním, objevují se neúhledné zápisy číslic i zápisy příkladů, které následně způsobují chyby, které nemusejí vyplývat z neznalosti matematické podstaty učiva – *např. zápis čísel v algoritmech písemných operací* 1268 <u>854</u> 9808 • Záměna číslic v zápisu čísla – *např. nerozlišení čísel 357, 375.* • Nezvládnutí komunikace grafické a graficky symbolické. • Nezvládnutí komunikace v oblasti obrazově názorné a obrazově symbolické – *např. žáci nedokáží využít grafického znázornění úlohy.*

Dysortografie se projevuje speciálními chybami, které souvisejí s rozlišováním krátkých a dlouhých samohlásek, tvrdých a měkkých slabik, sykavek, s vynecháváním písmen a slov, s přidáváním písmen, se spojením slov v celek, s nepochopením hranice slova apod. V matematice žák nedokáže spojovat číslice do zápisu čísla v poziční desítkové soustavě, některé číslice vynechává (zejména nulu), jiné číslice zapíše vícekrát, má problémy s rozlišováním geometrických útvarů apod.

Žákům s dysortografií můžeme pomoci tak, že se cíleně zaměřujeme na konkrétní jevy, které činí žákům problémy. K zápisu čísel využíváme pomůcky (modely jednotek, desítek, stovek, tisíců, atd. s příslušnými kartičkami se všemi nulami). Účelně pracujeme s chybou, kterou však nevyznačujeme červenou tužkou, neboť mnoho chyb opravených červeně je pro žáka demotivující. Barvy naopak využíváme k zdůraznění jevů, které by si měl žák zafixovat.

Konkrétní projevy
• Problémy při spojování slov v celek a číslic do zápisu čísla. • Přidávání nebo vynechávání číslic v zápisu čísla, zejména vynechávání nuly. • Problémy při rozlišování matematických objektů. • Neschopnost využít matematické učivo v jiných situacích.

Dyskalkulie je porucha matematických schopností a dovedností. Postihuje jak matematické představy, pochopení matematických pojmů, tak i operace s čísly přirozenými a racionálními. Žák má poruchu prostorové orientace a z toho plynoucí velké problémy v geometrii. Protože v matematice je přiměřené zvládnutí učiva nižší úrovně nezbytným předpokladem pro zvládnutí učiva úrovně vyšší, je nutné tomuto faktu výuku přizpůsobit.

- U žáků je třeba nejprve vytvořit pojem přirozeného čísla ve významu množství (prostřednictvím ekvivalentních množin), později čísla desetinného, zlomku, záporného a racionálního čísla tak, aby nastal požadovaný stupeň abstrakce, kdy jsou žáci schopni pracovat s čísly bez opory o konkrétní předměty.
- Žáci potřebují delší čas na seznámení se s číslem. Musí se naučit čísla správně číst, zapisovat, porovnávat, znázornit na číselné ose, zaokrouhlovat.
- Nejvíce problémů se vyskytuje při provádění operací s čísly. Základní problém je v pochopení každé z operací. Je nutné, aby žák věděl, co se s čísly při jednotlivých operacích děje. Když neporozumí operaci, píše čísla bez významu, jen aby něco zapsal. Potom následuje zvládnutí základních spojů každé z operací pamětně (je nutné postupovat ve velmi jemné metodické řadě příkladů). Pokud je to možné, naučíme žáky základní spoje sčítání a odčítání v oboru do dvaceti, které jim postačí i v dalším učivu. Rovněž naučíme žáky co nejvíce spojů násobení. Pamětné učení však musí být vždy prováděno s pochopením, žáci by měli umět příklad znázornit. Dalším učivem jsou algoritmy písemných operací. Zde postupujeme velmi individuálně, protože každý žák s poruchou učení má jiné předpoklady k práci s písemnými algoritmy. Žáci by také měli zvládnout počítání s číselnými výrazy se závorkami i bez závorek, kde by měli být schopni aktivně uplatnit dohodu o prioritě operací (násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním). Častou chybou je např. nerozlišení výrazů $4 + 3 \cdot 5$ a $(4 + 3) \cdot 5$, kdy v obou případech žáci uvádějí výsledek 35. Je třeba rozlišovat chyby, které jsou způsobeny poruchou učení, od chyb, které mají jiné příčiny (např. nepozornost nebo neznalost).
- Jedním z náročných témat je řešení slovních a aplikačních úloh. Nejvíce problémů mají žáci s porozuměním zadání slovní úlohy (čtení textu s pochopením), přepisem textu úlohy do matematického jazyka (příkladu, rovnice apod.). Dyskalkulické chyby, které se projevují při provádění operací, se vyskytnou i při řešení slovních úloh (např. když žák počítá $16 - 9 = 13$, jako by počítal $19 - 6$). Tato chyba se vyskytne, i když bude počítat $16x - 9x$. U žáků s dyskalkulií dáváme přednost řešení jednoduchých slovních úloh (úlohy, ve kterých je třeba k řešení pouze jedna operace) před úlohami, ve kterých je operací více. Složené slovní úlohy žákům můžeme, pokud je to nutné, rozdělit na úlohy jednoduché.
- Dalším problémem je práce s jednotkami měr a jejich převody. Žáci:
  - nemají představu o příslušné jednotce, např. 5 dm = 50 m, 70 m^2 = 700 dm^2
  - mají problémy s násobením a dělením čísly 10, 100, 1 000, … v souvislosti se zvětšováním a zmenšováním čísel, např. 70 kg = 7000 g
  - mají v podvědomí mylnou představu, že menších jednotek je méně, větších jednotek je více, např. 52 m = 0,52 mm.

  Proces práce s jednotkami vyžaduje mnoho konkrétních činností, aby žáci pochopili každou z jednotek. Teprve potom může následovat převádění jednotek měr.
- Pozornost je třeba věnovat rozvoji geometrické a prostorové představivosti. Správné představy geometrických pojmů a geometrických útvarů jsou předpokladem práce žáků v geometrii. Proto žákům poskytujeme co nejvíce možností, jak se s pojmy seznámit a kde hledat jejich reprezentace v praktickém životě. Rovněž vnímání geometrických zobrazení (zejména osové souměrnosti a posunutí) může žákům napomoci pracovat s geometrickými útvary. Velkou pozornost je třeba věnovat kreslení obrázků geometrických útvarů a jejich rýsování. Je nutné ponechat žákům dostatek času a prostoru ke zvládnutí dovednosti rýsovat a zpočátku méně zdařené pokusy neklasifikovat. Pro mnoho žáků s poruchami učení je problematické zvládnutí vztahu rovina – prostor (např. nechápou obrázky těles znázorněných ve volném rovnoběžném promítání nebo naopak neumí číst obrázky nakreslené v rovině a pochopit jejich prostorovou realitu). Pro některé žáky jsou problematické i sítě těles. Napomoci může práce s papírovými krabičkami (např. od čajů

a dalších produktů), kdy si žáci mohou sestavovat sítě těles samostatně. Pro některé žáky s dyskalkulií však může být geometrie záchranou, neboť se velmi dobře a s pochopením orientují v geometrickém učivu.

- Početní geometrie, která souvisí s výpočty obvodů a obsahů rovinných geometrických útvarů a povrchů a objemů těles, má několik úskalí. Žáci:
  - nerozlišují mezi geometrickým útvarem a jeho velikostí
  - neumí měřit geometrické útvary
  - formálně se naučí zpaměti a bez pochopení některé vztahy a vzorce a ty pak bezmyšlenkovitě uplatňují
  - uplatňují získané vědomosti nesprávně, znají některé vzorce, uplatňují je však nesmyslně.
    Např. úlohu Vypočítejte obsah obdélníku, jestliže a = 5 cm, b = 7 cm *řeší:*
    $a^2 + b^2 = c^2$
    $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$
    nebo
    $a^2 \cdot b^2 = c^2$
    $25 \cdot 49 = 1225$
- Veškeré činnosti spojené s výpočty velikostí geometrických útvarů by měly být založeny na konkrétní práci s těmito útvary, všechny vztahy by měly být vyvozeny na základě zážitků.

Dysmuzie je snížení nebo úplná ztráta smyslu pro hudbu – melodii a rytmus. Zejména ztráta smyslu pro rytmus je pro matematiku na 1. stupni ZŠ problémem.
Dypinxie je porucha v oblasti kresebných dovedností, neobratnosti při zvládání jemné motoriky ruky a prstů. V matematice se projevuje zejména při psaní a rýsování.
Dyspraxie je porucha obratnosti. Může mít vliv na upravenost matematických písemných prací a rýsovaných obrázků, na úpravu pracovního místa apod. Děti působí jako nešikovné.

Strategie žáků

Žáci se speciálními poruchami učení si často vypracují vlastní postupy, s nimiž se jim snadněji počítá. Těchto strategií je mnoho a úkolem učitele je strategii žáka odhalit, posoudit její matematickou správnost a rozhodnout, zda ji žák bude moci využívat např. i v dalších číselných oborech. Vlastní postupy žáků oceňujeme vždy, avšak při nesprávných postupech musíme žáky přesvědčit, kde v úvaze chybují. Níže ilustrované postupy jsou zápisem myšlenkových pochodů žáků, které však žáci tímto způsobem nezapisují. Procesy jim probíhají v hlavě. Často ani nedokáží slovně formulovat postupy svých výpočtů. Žáci využívají spoje, které jsou jim blízké a ve kterých se cítí jistější.

a) **Sčítání v oboru do 20 s přechodem přes základ deset.** Žáci se zpravidla učí rozkládat druhého sčítance tak, aby prvního sčítance doplnili do deseti:
   6 + 9 = 6 + (4 + 5) = (6 + 4) + 5 = 10 + 5 = 15

Strategie žáků, které je vhodné respektovat
1. 6 + 9 = (5 + 1) + (5 + 4) = (5 + 5) + (1 + 4) = 10 + 5 = 15 Žák rozkládá 6 a 9 s využitím čísla 5. 2. 6 + 9 = 6 + (6 + 3) = (6 + 6) + 3 = 12 + 3 = 15 Žák se opírá o součet dvou sobě rovných sčítanců. 3. 6 + 9 = 6 + (10 – 1) = (6 + 10) – 1 = 16 – 1 = 15 Žák využívá náhradního sčítance, pokud je blízký deseti (9 = 10 – 1). 4. 6 + 9 = (5 + 1) + 9 = 5 + (1 + 9) = 5 + 10 = 15 Pro žáka je snadnější rozložit prvního sčítance.

b) **Odčítání v oboru do 20 s přechodem přes základ deset**. Postup výuky je zpravidla takový, že se rozkládá menšitel podle jednotek menšence:

17 – 8 = 17 – (7 + 1) = (17 – 7) – 1 = 10 – 1 = 9

Strategie žáků, které je vhodné respektovat
1. 17 – 8 = (10 + 7) – 8 = (10 – 8) + 7 = 2 + 7 = 9 Žák rozkládá menšence a menšitele odečte od čísla 10. 2. 17 – 8 = (9 + 8) – 8 = 9 + (8 – 8) = 9 Žák se opírá o rozdíl čísel, který je roven nule. 3. 17 – 8 = 17 – (10 – 2) = (17 – 10) + 2 = 7 + 2 = 9 Žák nahradí menšitele rozdílem čísla 10 a dalšího čísla. 4. 17 - 8 = (10 + 7) – (1 + 7) = (10 – 1) + (7 – 7) = 9 Žák rozkládá menšence i menšitele podle jednotek menšence. 5. Specifické rozklady uplatňují žáci i při odčítání bez přechodu přes základ 10, např. 19 – 7 = (17 + 2) – 7 = (17 – 7) + 2 = 10 + 2 = 12 Žák se opírá o rozdíl, který je roven deseti.

Chybnou strategii uplatňují žáci, kteří zamění jednotky menšence s menšitelem. Chyba může vzniknout při nesprávné aplikaci odčítání bez přechodu přes základ deset nebo poruchou pravolevé orientace. Např. při výpočtu příkladu 17 – 9 uvažují takto: 7 – 9 nejde, 9 – 7 jde, 9 – 7 = 2, tedy 17 – 9 = 12. Ve skutečnosti počítá příklad 19 – 7.
Někteří žáci při sčítání a odčítání do dvaceti postupně přičítají po jedné, ev. takto odčítají. Pokud je to možné, tento postup nepreferujeme. Nebude totiž možné ho uplatnit při počítání v oboru do sta.

c) **Sčítání v oboru do sta.** Výuka se opírá o rozklad druhého sčítance tak, aby se první sčítanec doplnil k nejbližšímu násobku deseti:
16 + 9 = 16 + (4 + 5) = (16 + 4) + 5 = 20 + 5 = 25

Strategie žáků, které je vhodné respektovat
1. 16 + 9 = (10 + 6) + 9 = 10 + (6 + 9) = 10 + 15 = 25 Žák zásadně rozkládá čísla na desítky a jednotky, pokud to lze. 2. 16 + 9 = (10 + 6) + (4 + 5) = 10 + 10 + 5 = 25 Žák hledá čísla, jejichž součet je 10.

d) **Sčítání dvojciferných čísel.** Druhý sčítanec se rozloží na desítky a jednotky:
38 + 26 = 38 + (20 + 6) = (38 + 20) + 6 = 58 + 6 = 64

Strategie žáků, které je vhodné respektovat
1. 38 + 26 = 38 + (2 + 24) = 40 + 24 = 64 Žák doplňuje prvního sčítance do nejbližšího násobku deseti. 2. 38 + 26 = (30 + 8) + (20 + 6) = (30 + 20) + (8 + 6) = 50 + 14 = 64 Rozklad obou sčítanců používají žáci často, při tomto postupu však vzniká možný zdroj chyb pro odčítání s přechodem (např. 34 – 28 pak žáci počítají jako 30 – 20 = 10, 4 – 8 nejde, proto počítají 8 – 4 = 4, řeší tedy příklad 38 – 24).

e) **Odčítání v oboru do sta.** Uplatňuje se rozklad menšitele na desítky a jednotky:
54 – 26 = 54 – (20 + 6) = (54 – 20) – 6 = 34 – 6 = 28

Strategie žáků, které je vhodné respektovat
1. 54 – 26 = 54 – (4 + 22) = (54 – 4) – 22 = 50 – 22 = 28 Žák rozkládá menšitele podle jednotek menšence. 2. 54 – 26 = (30 + 24) – 26 = (30 – 26) + 24 = 4 + 24 = 28 Žák rozkládá menšence tak, aby získal nejbližší vyšší desítku nad menšitelem. 3. 54 – 26 = 54 – (2 + 24) = (54 – 24) – 2 = 30 – 2 = 28

Žák rozkládá menšitele tak, aby počet jednotek byl stejný jako počet jednotek v menšenci.

Uvedli jsme několik strategií žáků, které používají při pamětných výpočtech. Jejich výčet není a ani nemůže být úplný, protože každý žák s poruchou učení a s rozumovými schopnostmi v pásmu průměru až nadprůměru si vypracuje svou vlastní strategii. Učitel spolu s rodiči by měl žákům umožnit uplatňovat jejich strategie a nenutit je do postupů, které oni považují za správné. Žáci více než úlevy potřebují pomoc a pochopení jejich vidění čísel a jejich vlastních postupů.

Pokud žák zvládne základní spoje sčítání a odčítání v oboru do dvaceti zpaměti, má velmi usnadněnou situaci při výpočtech písemných. Analogická situace je při zvládání základních spojů násobení a dělení. Při násobení a dělení platí však ještě naléhavěji, aby žák nejprve operace pochopil (co se s čísly při násobení děje) a teprve potom se násobilku naučil zpaměti. Když se podaří žákům s poruchami učení toto zvládnout, usnadní se jim značně výuka dalších matematických témat. Proto je nutné speciálním postupům žáků věnovat patřičnou pozornost.

V následující tabulce jsou ve sloupcích uvedeny možné postupy, které využívají vždy předcházející příklady a analogie. Při práci se žáky se snažíme o pochopení jednotlivých typů příkladů, nikoliv o pouhé pamětné zvládnutí.

Sčítání čísel	Sčítání dvojciferných čísel	Odčítání čísel	Odčítání dvojciferných čísel
3 + 4 = 7	30 + 40 = 70	8 – 3 = 5	70 – 40 = 30
13 + 4 = 17	32 + 40 = 72	18 – 3 = 15	76 – 40 = 36
63 + 4 = 67	32 + 46 = 78	48 – 3 = 45	76 – 42 = 34
	34 + 46 = 80		76 – 46 = 30
3 + 7 = 10	36 + 48 = 84	16 – 6 = 10	76 – 48 = 28
13 + 7 = 20		46 – 6 = 40	
63 + 7 = 70			
		13 – 6 = 7	
6 + 7 = 13		43 – 6 = 37	
16 + 7 = 23			
56 + 7 = 63			

Diferencovaná výuka

Výhodami zařazení žáků se speciálními poruchami učení do běžné třídy základní školy jsou motivace pro práci a porovnání, které učivo by měli tito žáci zvládnout a na jaké úrovni by měli pracovat. Vyžaduje to však velkou empatii od učitele, pochopení problémů žáků. Příprava učitele na vyučovací hodinu je náročná. Během výuky se učitel musí věnovat jak žákům se speciálními vzdělávacími potřebami, tak i všem ostatním žákům, kteří se také potřebují na něco zeptat, něco jinak vysvětlit, nebo potřebují učivo více procvičit. Ve třídě bývá několik žáků, kteří mohou na některé matematické poznatky přijít sami, mnoho dětí však potřebuje pracovat podle vzoru, který jim učitel ukáže. Po větším množství vypočítaných příkladů se jim najednou učivo objasní a nastane u nich AHA efekt: „Já už vím, jak to je."

Při diferencované výuce neřešíme kvantitativní problém. Žák, který pracuje rychleji, vypočítá více příkladů než žák s dyskalkulií. Rozlišujeme však kvalitativní zapojení žáků – žáci počítají úlohy různé náročnosti. Když žáci například sčítají a odčítají přirozená čísla v oboru do dvaceti, můžeme žákům, kteří toto učivo zvládají, zadat, aby zapsali čísla od 1 do 9 do čtverce 3 x 3 tři tak, aby součty v řadách, sloupcích i úhlopříčkách byly stejné (magický čtverec). Zkušenosti ukazují, že i pro žáky s dyskalkulií je taková úloha výzvou a chtějí vědět, jak se takové úlohy řeší.

Ilustrujme na dvou příkladech, jak by učitel mohl postupovat.

Ilustrativní úloha 1

Napiš si tři různá jednociferná čísla a vytvoř z nich všechna trojciferná čísla tak, aby se v nich číslice neopakovaly.

a) Sečti všechna vytvořená trojciferná čísla. Součet vyděl součtem zvolených jednociferných čísel. Jestliže jsi dobře počítal, vyjde 222 při libovolné volbě původních tří čísel.
b) Z trojciferných čísel vyber takové, které má rozdíl jednotek a stovek alespoň dvě. Zapiš číslo s opačným pořadím číslic a od většího odečti menší. Vyšlo ti trojciferné číslo. K tomuto číslo vytvoř číslo s obráceným pořadím číslic a obě čísla sečti. Pokud jsi dobře počítal, vyšlo ti 1 089.

Možná řešení s metodickým komentářem

Žák zvolí např. čísla 3, 5, 8. Vytvoří čísla 358, 385, 538, 583, 835, 853. Sledujeme, zda je žák schopen zapsat všechna tato čísla, případně jaké problémy má v numeraci.

a) Součet těchto čísel je 3 552.
   3 552 : 16 = 222. Tento výsledek obdržíme vždy.
   Dělení mohou žáci s poruchami učení provést na kalkulátoru.

b) Žák vybere např. číslo 538. Číslo s opačným pořadím číslic je 835.
   Rozdíl těchto čísel je 835 – 538 = 297. Číslo s opačným pořadím číslic je 792.
   Součet těchto čísel je 297 + 792 = 1 089. Tento výsledek obdržíme vždy.

Úlohu je možné zařadit od třetího do šestého ročníku. Jde o procvičení operací s přirozenými čísly, každý žák má svoje zvolená čísla, pracuje samostatně a učitel má možnost sledovat jeho individuální úroveň znalostí a jeho specifické chyby.

Očekávaný výstup	M-5-1-02 Žák provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel

Ilustrativní úloha 2

Dostal jsi obdélník, měřítko a několik čtverečků o obsahu 1 cm^2. Zkus zjistit:

a) jaký má obdélník obvod
b) jaký má obdélník obsah.

Potřebné údaje si změřte.

Možná řešení s metodickým komentářem

Žákům rozdáme měřítko, jednotky obsahu (vystříhané čtverečky o obsahu 1 cm^2 a obdélníky vystřižené z barevného papíru s délkami stran vyjádřenými přirozenými čísly (např. 3 cm a 4 cm; 2 cm a 5 cm; 4cm a 6 cm; 1 cm a 7 cm). Každý žák dostane obdélník s jinými rozměry.

a) Žáci mohou nejprve měřit délky stran obdélníku a vypočítat jeho obvod. Přitom nezáleží na tom, jak postupují. Někdo uvede součet délek čtyř stran $a + b + a + b$. Někdo si všimne, že dvě protější strany jsou shodné, mají stejnou délku, tedy počítá $2a + 2b$. Další žáci si všimnou dvou sousedních stran a počítají dvakrát součet jejich délek $2(a + b)$.

b) Žákům dáme pokyn, aby pokládali čtverečky na obdélník tak, aby se nepřekrývaly a aby čtverečky pokryly celý obdélník. Žáci mají zapsat, kolik čtverečků použili. Žáci vidí počet řádků a počet sloupců čtverečků umístěných na svém obdélníku. Zapíší konkrétní výsledky (např. 3 · 4 = 12, 2 · 5 = 10, 4 · 6 = 24, 1 · 7 = 7). Ptáme se, jak to můžeme zapsat obecněji, když označíme strany obdélníku *a*, *b*.

Žáci tak mohou samostatně odvodit vztah $S = a \cdot b$.

V pátém ročníku můžeme tento postup zopakovat s některými čísly desetinnými. Jde o to, aby žáci pochopili rozdíl mezi obdélníkem jako geometrickým útvarem, a jeho obsahem jako číslem s jednotkou

a aby si postupně vyvodili vztah pro výpočet obsahu obdélníku a aby jej nezaměňovali se vztahem pro výpočet obvodu obdélníku.	
Očekávané výstupy	M-5-3-02 Žák sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran M-5-3-04 Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

Individuální vzdělávací plán

Individuální vzdělávací plán se sestavuje na základě diagnostiky v pedagogicko-psychologické poradně a na základě diagnostiky učitele matematiky. Je třeba zjistit, jaké problémy a nedostatky má žák v matematice vzhledem k ročníku, který navštěvuje, a rozhodnout o dalším postupu (zda a jak bude možné učivo zvládnout, zda se využije kompenzačních pomůcek). Zpracování individuálního vzdělávacího plánu odpovídá schopnostem a znalostem žáka a nemělo by být formální. V rámci individuálního plánu se řeší otázka, se kterým učivem se žák pouze seznámí nebo které učivo se může případně vynechat. Příkladem může být omezení číselného oboru, např. ve 4. ročníku může žák pracovat s čísly v oboru do tisíce, při písemném dělení jednociferným dělitelem počítá žák příklady jednodušší. Vynechat se může např. pamětné násobení a dělení mimo obor násobilek. Pracovní listy obsahují příklady v metodických řadách úloh od nejjednodušších ke složitějším. Při hodnocení a klasifikaci prací žáka hodnotíme především to, co žák zvládl. Při písemném násobení sledujeme, jakou část příkladu má žák správně, v kolika spojích chybuje. Žáka však hodnotíme podle správných spojů, a proto neškrtneme celý výsledek, protože chyba může být způsobena jediným chybným spojem.

Při zpracovávání individuálního vzdělávacího plánu sledujeme cíle krátkodobé (které učivo zvládne žák v nejbližší době a jaké výsledky můžeme očekávat). Jde především o aktivizaci žáka, o získání jeho zájmu o matematiku a zbavení se obav z matematiky. Sledujeme také cíle střednědobé (co by měl žák zvládnout v průběhu jednoho školního roku) a cíle dlouhodobé (ty jsou spojeny s dalším vzděláváním žáka na vyšším stupni školy nebo v zařazení do profesního života). Zpracování individuálního vzdělávacího plánu by mělo být zbaveno formalismu, neboť má význam nejen po žáka, ale i pro učitele i rodiče. Žákovi dává naději, že je snaha mu pomoci. Učiteli usnadňuje práci se žákem na úrovni, které je schopen, a rodičům poskytuje možnost seznámit se s problémy žáka na odborné úrovni.

Na základě dlouholetých zkušeností se ukazuje, že nejvhodnější vzdělávání žáků se speciálními poruchami učení je v rámci běžné třídy základní školy s možností návštěvy speciálního dyskalkulického kroužku. Zde mají možnost zeptat se na to, co jim uniklo nebo čemu neporozuměli. Retrospektivní pohled dospělých osob, které byly v dětství vzdělávány ve speciálních školách nebo třídách, tuto myšlenku podporuje. Lidé s dyskalkulií, kteří mohou mít nadprůměrnou inteligenci a poruchu jen v některé oblasti, v dospělosti postrádají to, co se v rámci základní školy nenaučili.

Vzdělávání žáků s matematickým nadáním

Vzdělávání žáků s matematickým nadáním je stanoveno v RVP ZV. Pokud jsou žáci vzděláváni v běžné třídě základní školy a nemohou navštěvovat specializované školy nebo třídy, je úkolem učitele matematiky jejich nadání rozvíjet. Není vhodné zaměstnávat žáky větším množstvím úloh co do počtu, ale je nutné vybírat úlohy s vyšší náročností na logické myšlení. Zadáváme úlohy, které podněcují žáka k objevování zákonitostí, využití intuice a vhledu, k vytváření hypotéz a jejich ověřování, k různým řešením téže úlohy, k zobecňování apod. Vybíráme úlohy z témat, která nejsou v učivu matematiky explicitně zařazena, které však mohou žáci se svými vědomostmi řešit. Jde o úlohy s náměty z logiky, kombinatoriky, teorie grafů, problémové úlohy, úlohy rozvíjející geometrickou představivost, doplňování různých schémat apod. Důraz klademe vždy na logickou úvahu, nikoliv na uplatňování postupů pomocí matematického aparátu vyšších ročníků (např. velkou část úloh řeší dospělí pomocí rovnic, žáci však rovnice k řešení úlohy uplatnit nemusejí). Dopřejeme žákům využití grafického znázornění úlohy, neboť vizualizace je pro většinu žáků prostředkem k usnadnění řešení.

Vedeme žáky k vyhledávání všech řešení dané úlohy a k zápisům postupu řešení. Právě se zápisy řešení mají nadaní žáci velké problémy a je třeba je postupně tomu učit. Zapojíme žáky do různých matematických soutěží, zejména do Matematické olympiády.

Zkušenosti ukazují, že vzdělávání nadaných žáků v rámci integrace v běžné třídě základní školy s tím, že je jim věnována individuální péče v běžných hodinách a že mají možnost např. jednou až dvakrát týdně zúčastnit se práce v kroužku pro nadané děti, je pro jejich sociální rozvoj nejpříznivější.

Problematika přechodu mezi prvním a druhým stupněm ZŠ

Při přechodu žáků se speciálními poruchami učení na 2. stupeň základní školy není se třeba obávat problémů, pokud si všechny zúčastněné strany (rodiče, učitel, speciální pedagog i žák) uvědomí, které aspekty je potřeba brát v úvahu a jak předcházet eventuálním problémům. Je nutné vzít v úvahu, že dyskalkulie neopravňuje žáka k nečinnosti v matematice.

Na úspěšnost žáků v matematice na 2. stupni má vliv mnoho faktorů. Především je třeba ověřit, zda výkony žáka v matematice jsou výrazně odlišné od výkonů v jiných předmětech a zda jsou v rozporu s úrovní inteligence žáka. Odborná vyšetření v pedagogicko-psychologické poradně jsou východiskem k další činnosti žáka i v matematice. Také je třeba zjistit vliv dalších speciálních poruch učení (zejména dyslexie a dysgrafie) na proces učení v matematice. Rovněž je nutné seznámit se s dříve prováděnými reedukačními cvičeními a pomůckami a s jejich úspěšností při orientaci žáků ve světě čísel. Sledování schopnosti logického uvažování žáka, používání jazyka matematiky i používání samotné matematiky jako nástroje k řešení praktických problémů (např. nákupy, využívání číselných údajů v běžném životě) a v neposlední řadě úroveň jeho matematických vědomostí je součástí analytické činnosti učitele matematiky.

Některé matematické pojmy je třeba připomenout, některé zopakovat, jiné vytvořit, některé upřesnit. V návaznosti na první stupeň je nutné sledovat přetrvávající problémy v rámci provádění operací s přirozenými čísly i v rámci geometrie. Předpokládáme, že pracujeme se žáky, u kterých je diagnostikována dyskalkulie v pedagogicko-psychologické poradně, tj. se žáky, kteří mají inteligenci v pásmu průměru až nadprůměru a mají problémy v některých částech matematického učiva. Dále předpokládáme, že žáci mají zájem se něčemu naučit, že jejich problémy nejsou způsobeny nedostatečnou přípravou nebo nezájmem o školní výuku.

Příčiny problémů žáků v matematice

<u>Adaptace na odborné vyučování</u>

Na prvním stupni základní školy se žáci setkávali s odborným vyučováním jednotlivých předmětů výjimečně. Většinu předmětů učí vesměs jeden učitel a žáci jsou po celou dobu vyučování fixováni na jednu osobnost. Na druhém stupni se tato situace mění, protože zpravidla každý předmět vyučuje jiný učitel. I když je ve třídě určen třídní učitel a i když matematika může mít během týdne více vyučovacích hodin, žákům zpočátku chybí během dne „pevný bod“, kterým byl pedagog na 1. stupni. Někteří žáci si na změnu učitele po jednotlivých vyučovacích hodinách zvykají delší dobu.

<u>Sociální zařazení ve třídě</u>

V 6. ročníku základní školy se žák zpravidla dostává do nového kolektivu spolužáků a znovu si mezi nimi utváří své sociální zařazení. Vytváří se nové vztahy mezi učitelem a žáky. U žáka se speciální poruchou učení je třeba sledovat, zda se nedostává do role outsidera nebo žáka, který je kritizován za eventuální úpravu učebních postupů, požadavků či klasifikace. Zpravidla žák se speciální poruchou učení musí vykonat mnohem více práce než jeho spolužáci. Jeho postavení v třídním kolektivu se někdy musí napomoci.

<u>Změna stylu práce v matematice</u>

Výuka matematiky na 2. stupni základní školy je poněkud odlišná od výuky na 1. stupni, neboť tam jsou metody a formy práce rozmanitější. Ve větší míře se využívá her, práce ve skupinách, činností na koberci apod. Na druhém stupni začíná převažovat výuka v tradičním pojetí, někdy jsou přísnější podmínky a náročnější požadavky pro klasifikaci žáků apod. Navíc přibývá mnoho nových pojmů, které jsou abstraktní a kterým by měl žák porozumět.

Zvýšené požadavky na samostatnost žáka

Předpokládá se větší samostatnost žáků při plnění běžných povinností ve škole i v matematice, např. starost o pomůcky (funkční pero, ořezaná tužka pro rýsování, trojúhelník, funkční kružítko, sešit), samostatnost v rozhodování, ve schopnosti dokončit práci, samostatnost v organizaci práce i času.

Zvýšené požadavky na časové zvládnutí úkolů

Zvyšují se požadavky na pracovní tempo žáků. Předpokládá se, že řada poznatků je zautomatizovaná, což u dětí se speciálními poruchami učení v matematice zpravidla není, a proto jim časový faktor činí velké problémy.

Vztah k matematice

Vztah žáků k matematice se utvářel již pět let na 1. stupni ZŠ (v pozitivním či negativním smyslu) a s tímto vztahem přicházejí žáci na druhý stupeň. Ze zkušeností i z vyjádření mnoha žáků je nejvýznamnějším činitelem, který utváří vztah k matematice, právě učitel matematiky. Vztah se odvíjí také od toho, jak je žák v matematice úspěšný, jak se mu daří. Pedagogickým mistrovstvím učitele matematiky je budovat kladný vztah k matematice i u žáků, kteří mají s matematikou problémy.

Zvýšené požadavky na zobecňování a abstrakci

Postup vytváření pojmů v matematice má přesnou poznatkovou strukturu od činností s konkrétními modely přes modely univerzálnější až po abstraktní znalosti. Proces zobecňování vyžaduje určitou úroveň přemýšlení. Cílem pak je vytvoření obecnějších, abstraktních poznatků a radost z objevu, že určitý poznatek platí vždy.

Zvýšené požadavky na schopnost aplikovat učivo k řešení úloh

Schopnost aplikace zvládnutého učiva je v matematice nepřetržitým procesem a úrovně aplikací se neustále zvyšují (např. se nejprve automatizují pamětné spoje základních početních operací s přirozenými čísly, tyto se následně aplikují v písemných algoritmech). Aplikace pamětného i písemného počítání se dále využívají v řešení slovních úloh, kdy by měl žák uvědoměle volit početní operace potřebné k řešení slovní úlohy. Další aplikace souvisejí s řešením praktických úloh běžného života a profesního zaměření.

Neadekvátní způsob výuky vzhledem k poruše žáka

Pro žáky se speciálními poruchami učení je třeba hledat vhodné výukové postupy, kterým porozumí. Zpravidla je nutné učivo atomizovat, naučit nejelementárnější postupy, sledovat chyby žáků a didakticky je využívat. Výuka musí být zbavena jakéhokoliv formalismu, vysvětlovány by měly být všechny elementární jevy tak, aby žák učivo nejprve pochopil a teprve potom pamětně zvládnul. Málo vhodné jsou soutěže, ve kterých hraje roli rychlost.

Úroveň motivace

Klíčovým faktorem pro práci se žáky se speciálními poruchami učení je jejich motivace. Žáka, který nevidí smysl učení, který považuje výuku matematiky za zbytečnou a poznatky za nepotřebné nebo který nemá o učení zájem, není možné čemukoliv naučit. K tomu, aby výuka matematiky byla úspěšná, je vždy třeba vlastní aktivity žáka. V matematice máme mnoho možností, jak žákům ukázat její krásu, avšak vždy musí být žákům srozumitelná. Výrazným motivačním faktorem je úspěch žáka nebo pochvala.

Nezvládnutí učiva nižší úrovně

Matematika je specifický vyučovací předmět v tom smyslu, že každý prvek nižší úrovně je nezbytným předpokladem pro zvládnutí prvků vyšší úrovně. Pokud má dítě nedostatky z nižších ročníků, je tomu třeba přizpůsobit další výuku. Je nutné vypracovat systém opakování potřebného učiva a rozhodnout, které učivo je pro žáka nezbytné a se kterým učivem se může seznámit pouze orientačně. Rovněž je třeba zvážit používání kompenzačních pomůcek a vhodných metod práce. Žáci se speciálními poruchami učení neumí zpravidla v 6. ročníku sčítat a odčítat s přechodem přes základ deset, neumí základní spoje násobení a dělení, nezvládají písemné algoritmy, nechápou význam mnoha pojmů apod. Je nutné zvážit, jak se budou postupně nedostatky doplňovat a zda neustálé opakování učiva prvního stupně přináší nějaký pokrok. V rámci individuálního vzdělávacího programu se stanovuje zvládání učiva po malých krocích a s aktivní účastí žáka.

Klasifikace v matematice

V hodnocení žáků se speciální poruchou učení je nutné volit hodnocení pozitivní, neboť žák zpravidla musí vykonat mnohem více práce než jeho spolužáci, i když výsledky nemusí být zpočátku dobré. Podstatné je naučit žáka pracovat s chybou a hodnotit každý krok práce, nejen výsledek. Používáme spíše hodnocení, kdy si všímáme úspěšných řešení a potlačujeme příznaky špatného výkonu. Pozitivní motivace žáka je v tomto případě důležitější než bezchybný výkon. Pokud není žák motivován negativně, jeho výkon se začne postupně zlepšovat. Pak můžeme přistoupit k objektivnějšímu hodnocení vzhledem k ostatním žákům. Je však nutné, aby žák i rodiče měli určitou představu o objektivní klasifikaci, neboť další vzdělávání žáka na střední škole mu může přinést problémy (např. s možností volit maturitu z matematiky).

Využívání kompenzačních pomůcek

Pokud dítě používalo na 1. stupni jako kompenzační pomůcku kalkulátor, není možné ji v 6. ročníku neposkytnout. Je však možné (s ohledem na jeho schopnosti) se domluvit na tom, které výpočty může provádět bez kalkulačky a které s kalkulačkou (zejména při práci s desetinnými čísly). Není možné klasifikovat práci kalkulačky. Často se jako kompenzační pomůcka nabízí tabulka násobků. Je však nutné si uvědomit, že používáním tabulky se žák násobilku nenaučí. Setkáváme se i se žáky, kteří odmítají nabízenou kompenzační pomůcku proto, aby nebyli v kolektivu spolužáků odlišní. Někteří žáci využívají k operacím s celými čísly modely číselné osy, další využívají mřížky k převodu jednotek měr apod. Kompenzační pomůcky by vždy měly žáku přinést usnadnění výpočtů a měly by být žákem vlídně přijaty a s porozuměním používány. Vzhledem k tomu, že na druhém stupni jsou žáci starší než na stupni prvním, mnoho kompenzačních postupů si vypracují sami a snaží se svůj handicap řešit pomocí vlastních postupů (setkali jsme se např. s holčičkou, která si v každém sešitě matematiky na poslední straně narýsovala číselné osy a mnoho operací si úspěšně ukazovala právě na nich).

Některé poznámky k výuce

Budování základních pojmů

Při vytváření jakéhokoliv pojmu je třeba pojem vytvořit tak, aby žáci se speciálními poruchami učení věděli, jaký má význam a jaké má vlastnosti. V souvislosti s číselnými obory je třeba, aby měli jasnou představu o desetinném čísle jako jiném zápisu desetinného zlomku, aby chápali pojem zlomku jako části celku a pojem zlomku jako reprezentanta racionálního čísla, aby jim byl jasný význam čísla záporného, později obecně čísla racionálního a reálného. Budování jednotlivých číselných oborů vychází z vlastních zkušeností žáků a je zbaveno jakéhokoliv formalismu. Bez pochopení základních pojmů není možná další jakákoliv výuka. Metody výuky by tedy měly vycházet z konkrétních činností, zkušeností a zážitků žáků. Informace sdělované učitelem zpravidla potřebné znalosti nevytvářejí.

Operace s čísly

Nejvíce problémů mají žáci v oblasti provádění operací s čísly. Jednak se přenášejí nedostatky a dyskalkulické chyby z prvního stupně základní školy, jednak vznikají problémy z nepochopení operací s jednotlivými čísly (např. žáci sčítají zlomky tak, že součet čitatelů lomí součtem jmenovatelů). Nepochopení poziční desítkové soustavy a zápisu čísel v ní způsobuje chyby při práci s různými řády, např. 7 + 20 = 90, 0,5 + 1,4 = 6,4. Chyby tohoto druhu se projevují i v písemných algoritmech jednotlivých operací. Neustále je třeba upevňovat základní spoje sčítání a odčítání v oboru do dvaceti a základní spoje násobení a dělení. Každou operaci je třeba vysvětlit tak, aby žáci věděli, co se s čísly při dané operaci děje.

Sledujeme, jak žák rozumí pojmu
• přirozeného čísla • zlomek jako části celku • zlomek jak reprezentanta racionálního čísla (např. číslo jedna polovina) • desetinný zlomek • desetinné číslo.

Všímáme si, zda žák rozumí jednotlivým operacím v číselných oborech, zvláště pak operacím se zlomky.
Žáci sčítají zlomky tak, že součet čitatelů lomí součtem jmenovatelů:

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{7}{9}$$

Podobně při odčítání:

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{0}{2}$$

Při násobení a dělení zlomků dělají žáci např. následující chyby:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$3:\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{7}{5}:\frac{14}{3}=\frac{2}{1}$$

Algebraické výrazy

Používání písmen ve významu čísla souvisí se schopností zobecňovat a abstrahovat. K této dovednosti přicházejí žáci postupně, ne všichni ve stejném věku nebo ve stejném ročníku. Proto se zde může projevit opožděný vývoj, který lze v dalším ročníku dohnat a žák potom zvládá učivo bez problémů. Algebraické výrazy umožňují efektivní, stručný a přesný zápis i vyjadřování a ekonomizují myšlení.

Při výuce je třeba respektovat skutečnost, že pochopení významu písmen je proces dlouhodobý a musí být učitelem promyšleně řízen. Dále je nutné neustále zdůrazňovat význam jednotlivých písmen v zápisech výrazů, aby nedocházelo k mechanickému a formálnímu osvojování. Písmeno ve významu čísla se využívá v mnoha různých situacích (ve významu proměnné, konstanty, neznámé, speciálního označení určité veličiny aj.). Postup výuky má svá pravidla a je obvykle uveden v učebnicích nebo didaktikách matematiky. Problematická bývá motivace učiva, žáci by vždy měli vědět, k čemu je dané učivo pro ně užitečné. Učitel může určité problémy žáků předpokládat, proto se zaměřme na některé z nich. Problémy žáků a jejich chyby při práci s algebraickými výrazy mají mnoho projevů, které můžeme rozdělit do několika skupin.

a) Chyby numerické, které vyplývají z nesprávných operací s čísly (např. $4x - 12x = 8x$).
b) Chyby vyplývající z nepochopení počítání s algebraickými výrazy. Tyto chyby mohou být způsobeny:
   - formálním přístupem, kdy se žáci naučí pravidla zpaměti, ale neumí je aplikovat v příkladech
   - přenosem dyskalkulických problémů z oboru přirozených čísel do dalšího učiva (např. mocnin nebo práci s koeficienty)
   - používáním nesprávné strategie při řešení
   - chyby velkých kroků (žáci provádějí současně několik úprav).
c) Chyby vyplývající z psychiky žáka:
   - malá koncentrace, roztržitost, překotná uspěchanost
   - vliv časové tísně při písemných zkouškách
   - bezradnost, tápání
   - špatný zápis dobře míněného postupu
   - bariéra „bílého papíru“, zejména při písemných pracích
   - nesprávné pochopení diktovaného zadání.
d) Chyby vyplývající z výuky, která není příznivá danému žáku. Učitel zpravidla:
   - vyžaduje pouze svoji strategii (výuka vede k formalismu)
   - sděluje žákům hotové poznatky (výuka vede k verbalismu)
   - vyvozuje učivo za aktivní účasti žáků a objevování (výuka vede ke konstruktivismu).

   Většina žáků vyžaduje spíše verbalistický přístup („Řekněte nám, jak to je a my se to naučíme.“). Pamětné učení, které není opřeno o pochopení, vede v tomto případě k tomu, že žáci neumí použít učivo v jiných situacích, učivo brzy zapomenou. Stačí, aby se místo písmen *a, b* použila písmena jiná a žák si již neví rady.

Rovnice

S úlohami, které se v budoucnu řeší pomocí rovnic, se žáci setkávají daleko dříve než na druhém stupni ZŠ. Například úloha „Které číslo musím přičíst k číslu 20, abych dostal 100?“ se již na prvním stupni ZŠ řeší

buď experimentem (postupným dosazováním) nebo pomocí inverzní operace. Tato úloha se pomocí rovnice zapíše $20 + x = 100$.
Postup řešení rovnic má svá přesná pravidla a určení řešení/kořene rovnice probíhá na základě provádění ekvivalentních úprav (úprav, při kterých rovnice zadaná a rovnice upravená mají stejnou množinu řešení). Při jejich provádění se zpravidla pracuje se závorkami, operacemi s celými čísly a se zlomky. Při tom se mohou projevit chyby, které se u žáků s poruchami učení projevovaly při provádění běžných operací s čísly. Jde o sčítání a odčítání s přechodem přes základ deset, nezvládnutí základních spojů násobení a dělení přirozených čísel, problémy s počítáním s nulou, s čísly zápornými, zlomky aj. K tomu přistupují problémy s pravolevou orientací (např. při zápisu víceciferných čísel) i vliv dysgrafie při zápisech rovnic. Dále se vyskytují potíže při rozlišování algebraických výrazů a při práci s nimi, při použití znaménka „minus" před závorkou, chyby vzniklé z nepozornosti, zapomínání při provádění některých úkonů a mnoho dalších problémů vyplývajících z individuality dyskalkulického žáka.

Slovní úlohy a problematika jejich řešení
Schopnost žáka řešit slovní úlohy je nezbytná pro řešení úloh aplikačních a zejména pak úloh, které předkládají běžné životní situace. Potřeba zvládat běžné problémy související s placením a hospodařením s financemi patří k základním potřebám každého člověka. Další aplikace slovních matematických úloh souvisejí s výkonem téměř každé profese. Proces řešení slovních úloh často bývá pro žáky s poruchami učení úkolem stěží řešitelným.

Příčiny problémů při řešení slovních úloh
<u>Pochopení či nepochopení textu slovní úlohy</u>
Slovní úloha je zpravidla zadána textem, který je pro žáky více či méně srozumitelný jako česká věta. Nejprve se žáci setkají se zadáním slovní úlohy, nejčastěji prostřednictvím textu, který by měli přečíst s porozuměním. Hraje zde roli:

- **délka textu**, neboť příliš dlouhý text znesnadňuje pochopení (než přečtou závěr zadání, nepamatují si, co bylo na počátku)
- **volba použitých termínů** – některým použitým pojmům žáci nemusí rozumět
- **tématika slovní úlohy** – zda je pro žáky přitažlivá a srozumitelná
- **způsob zadání číselných údajů** – zda jsou uvedeny prostřednictvím čísel zapsaných číslicemi (např. 6 dětí) nebo prostřednictvím slov (šest dětí); v prvním případě číselný údaj vnímají, ve druhém ne; některé číselné údaje mohou být nadbytečné a žáci se je snaží za každou cenu uplatnit
- **vliv dalších speciálních poruch učení**, zejména dyslexie (čtení textu bez porozumění) a dysgrafie (neschopnost zapsat potřebné údaje).
- **schopnost koncentrace na daný text,** čtení s porozuměním je dalším důležitým aspektem pro správné pochopení zadání slovní úlohy. Pro žáky, u kterých je diagnostikována dyslexie, je nutné tuto poruchu u slovních úloh zohlednit.

Ze zadaného textu žáci zpravidla provádějí stručný zápis úlohy. Jde o to, aby si ujasnili, které údaje jsou zadány a který údaj je neznámý. Provádění stručného zápisu je problematické pro dysgrafiky i pro žáky tzv. dvojí výjimečnosti (s nadáním pro matematiku se souběžnou speciální poruchou učení dyslexií a dysgrafií). Žáci často považují zápis za zbytečný.
<u>Zvládnutí rozboru slovní úloh</u>
Jednou z nejdůležitějších částí řešení slovní úlohy je její rozbor. Ten spočívá v ujasnění si vztahů mezi hledanými a zadanými údaji. Z účelně provedeného rozboru pak vyplyne volba početních operací, které vedou k vyřešení slovní úlohy. Přepis slovního zadání do matematického jazyka se nazývá matematizace reálné situace. Součástí rozboru je také grafické znázornění vztahů ve slovní úloze. Toto znázornění mnoha žákům usnadní zápis úlohy a její následné řešení. Pokud žáci nezvládnou pochopit vztahy mezi hledanými a zadanými údaji a z rozboru nevyplyne správná volba operace, zpravidla náhodně volí číselné údaje ze zadání a náhodně volí operace, které s nimi provádějí. Výsledek je pak často naprosto nesmyslný. Žáci nejčastěji vybírají číselné údaje zapsané čísly (někdy jen některé) a zpravidla je sčítají.

Vhodný postup při rozboru slovní úlohy
Při rozboru vycházíme od otázky úlohy a neustále sledujeme postup výpočtu. • Co máme vypočítat? • Co k tomu potřebujeme? • Známe všechny potřebné údaje? • Pokud je neznáme, kde je získáme?

Řešení matematické úlohy
Při vlastním řešení matematické úlohy (např. rovnice, soustavy rovnic) se opět mohou vyskytnout chyby, které žáka provázejí v důsledku jeho poruchy učení.
Odpověď
Po vyřešení úlohy následuje odpověď. Někteří žáci mají problémy odpovídat, protože již zapomněli, jak byla otázka formulována. Po formulaci odpovědi následuje zkouška správnosti řešení slovní úlohy.
Provedení zkoušek správnosti
K důkladnému pochopení slovní úlohy může přispět i provedení zkoušky správnosti řešení slovní úlohy. Je třeba odlišit zkoušku správnosti prováděných operací a zkoušku správnosti řešení (v některých úlohách je tedy třeba provést zkoušky dvě). Ukazuje se, že některým žákům se úloha objasní až při provádění těchto zkoušek.
Nejprve jsou řešeny slovní úlohy jednoduché, u nichž je třeba k řešení pouze jedna operace. Následně slovní úlohy složené, pro jejichž vyřešení je třeba více než jedna operace. Většinu slovních úloh řešíme v oboru čísel přirozených a teprve po jejich zvládnutí řešíme slovní úlohy v oboru čísel racionálních.
Pomoc žákům při řešení slovních úloh můžeme uplatňovat ve dvou rovinách – v rovině přístupu žáků k řešení slovních úloh a v samotném procesu řešení slovních úloh.

Odstraňování obav ze slovních úloh
• Zbavit řešení slovních úloh formalismu. • Odstraňování nejistoty žáků při volbě operací. • Didaktické využití chybných řešení. • Volba úloh, které mají pro žáka význam. • Zvýšení aktivity žáků při tvorbě slovních úloh.

Ilustrujme na několika typických příkladech chybná žákovská řešení slovních úloh, z nichž je patrné, že žáci pracují pouze s čísly bez pochopení operací potřebných k řešení slovní úlohy. Dokonce zkouška správnosti „jim vyjde správně“.

Ilustrativní úloha 3
Tomáš měl 6 kuliček, a to bylo třikrát méně kuliček, než měl Filip. Kolik kuliček měl Filip?
Chybné žákovské řešení
6 – 3 = 3 Filip měl 3 kuličky. Zk. 3 + 3 = 6
Metodický komentář
Chybné uplatňování tzv. signálů (např. „více“ – přičítáme, „méně“ odčítáme), záměna vztahů „o *n* více“ – méně“, „*n* krát více – méně“, formalismus při řešení úlohy a provedení zkoušky správnosti.

Ilustrativní úloha 4
Ve školní jídelně je 18 stolů, u každého stolu je 6 židlí. Kolik židlí je v jídelně?
Chybné žákovské řešení
18 : 6 = 3

Tři židle. Zk. $3 \cdot 6 = 18$
Metodický komentář
Nepochopení významu operací s přirozenými čísly, záměna operací.

Ilustrativní úloha 5
Pavel měl 8 kuliček, Petr měl o 4 kuličky více než Pavel. Kolik kuliček měli dohromady?
Chybné žákovské řešení
$8 + 4 = 12$ Dohromady měli 12 kuliček. Zk. $12 - 4 = 8$
Metodický komentář
Nepochopení složené slovní úlohy, zaměření se jen na operace bez významu, nevyužití správného grafického znázornění. Složenou slovní úlohu řeší jako úlohu jednoduchou – kolik kuliček měl Petr.

Ilustrativní úloha 6
Do školy bylo zakoupeno 50 učebnic matematiky za 4 250 Kč. Je potřeba zakoupit ještě 20 stejných učebnic. Kolik se za učebnice zaplatí?
Chybné žákovské řešení
$4\,250 + 50 = 4\,300$ $4\,300 \cdot 20 = 86\,000$ Za učebnice se zaplatí 86 000 Kč.
Metodický komentář
Žák pracoval pouze s čísly uvedenými v zadání úlohy, bez pochopení jejího smyslu.

Proces řešení slovních úloh

Je důležité neustále učit žáky číst s porozuměním běžný text (snadný a pro žáky zajímavý) tím, že vyprávějí, co četli. Jestliže žák nezvládá dovednost číst s porozuměním běžný text, není možné vyžadovat, aby s porozuměním četl text matematický. Čtení matematického textu je pro některé žáky velmi obtížné, avšak nikdy není beznadějné. Je třeba vynaložit určité úsilí při formulování vhodné řady úloh (od jednoduchého vyjádření ke složitějšímu) a hlavně projevit velkou dávku trpělivosti. Pro dyslektiky lze zvážit alternativní způsoby zadání slovní úlohy (obrázkem, dramatizací apod.). Vhodná je diskuse o textu slovní úlohy, vyprávění a přeformulování textu žáky.

Volba slovních úloh by měla být pro žáky tak přitažlivá, aby pociťovali potřebu slovní úlohy řešit a aby je řešili se zájmem. Velmi vhodné je řešení komplexu úloh k jedné tématice např. prostřednictvím projektů. Dále je třeba vzít v úvahu, v jakém číselném oboru se žák orientuje. Nejprve je vhodné volit údaje v oboru přirozených čísel (do sta, do tisíce). Pokud žák řeší slovní úlohy s menšími čísly spolehlivě, nemusí řešit slovní úlohy s čísly v oboru do milionu, kdy mu velká čísla mohou činit problémy. Teprve po zvládnutí úloh s čísly přirozenými volíme čísla desetinná a ještě později zlomky.

Slovní úlohu přepíšeme do matematického jazyka (příklad, rovnice, nerovnice, soustava rovnic) a tuto matematickou úlohu řešíme. Výsledek interpretujeme zpět do reality a získáme tak řešení slovní úlohy.

Reedukační cvičení

Dále věnujeme pozornost procvičování zápisu slovního vyjádření matematickým výrazem např.:

- dané číslo zvětši o 4
- zapiš dvojnásobek daného čísla
- zapiš součet dvou čísel 7 a 9
- mám 5 Kč, ty máš o 10 Kč více než já
- mám 20 Kč a to je o 8 Kč více než máš ty
- zapiš číslo o 3 větší než je číslo x

– zapiš číslo třikrát větší než je číslo *x*.

Snažíme se také naopak naučit žáky číst matematický zápis, tj. vyjádřit slovní formulací číselný (později algebraický) výraz např.

- Vymysli slovní úlohu tak, abys využil/a čísla 3, 6, 14.
- K číselnému výrazu $3 \cdot 6 + 14$ vymysli slovní úlohu.

Volíme „jemné“ metodické řady, ve kterých se v dalším příkladu vyskytne jen jeden nový jev. Jako příklad je v Příloze 3 uvedena Metodická řada k řešení lineárních rovnic.

Závěr

Závěrem využijme slovo DYSKALKULIE k přehlednému uvedení toho, co všechno je třeba při vzdělávání žáků se specifickými poruchami učení brát v úvahu.

D Diagnostika ve dvou úrovních, jednak v pedagogicko psychologické poradně, jednak učitelem matematiky, aby zjistil úroveň znalostí v matematice vzhledem k ročníku, který žák navštěvuje.

Y Písmenem Y nezačíná žádné vhodné slovo, můžeme však toto písmeno chápat jako rozcestí. Žák je v situaci, kdy neví jak dál a potřebuje poradit. Pokud se mu dostane informace v okamžiku, kdy ji potřebuje, má toto informace velkou didaktickou hodnotu.

S Specifičnost matematiky ve srovnání s ostatními výukovými předměty – je to předmět vysoce abstraktní a zároveň každý prvek nižší úrovně je nezbytným předpokladem zvládnutí prvků vyšší úrovně.

K Komunikace v matematice probíhá na několika úrovních, nejdůležitější je schopnost komunikovat v jazyce symbolickém (přepsat text českého jazyka do jazyka matematiky) a komunikovat v oblasti obrazově názorné a obrazově symbolické.

A „AHA“ efekt – když žák sdělí „já už vím“, je to největší odměna pro učitele.

L Líbivé pomůcky a postupy, které žáka osloví a rozumí jim.

K Konkrétní modely pro manipulativní činnost k samostatnému objevování poznatků, vlastní portfolio pomůcek.

U Úspěch, byť sebemenší, je předpokladem další práce.

L Lépe využívat paměť, učit se s porozuměním, něco si zapamatovat.

I Individuální vzdělávací program, respektování individuality každého žáka.

E Energie a elán pro všechny zúčastněné strany.

Závěr

Informační zdroje

Tematický okruhu Číslo a početní operace

CIHLÁŘ, J.. MELICHAR, J., ZELENKA, M. *Matematika pro 5. ročník ZŠ.* Litvínov: Dialog, 1997
DIVÍŠEK, J. a kol.
Didaktika matematiky pro studium učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Praha: SPN 1989.
FUCHS, E., HOŠPESOVÁ, A., LIŠKOVÁ, H. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu Základní vzdělávání*. Praha: Prometheus 2006.
FUCHS, E., LIŠKOVÁ, H., ZELENDOVÁ, E. *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost*. Praha: JČMF 2013.
HOŠPESOVÁ, A., STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: JČU 2007.
KUBÁTOVÁ, E., NOVÁK, B. Matematika a její aplikace. In: *Průvodce výukou dle RVP na 1. stupni ZŠ. 1. díl.* Olomouc: Prodos 2006.
NOVÁK, B., NOVÁKOVÁ, E. Matematika a její aplikace. In: *Průvodce výukou dle RVP na 1. stupni ZŠ. 2. díl.* Olomouc: Prodos 2008.

Tematický okruhu *Číslo a proměnná*

Kolektiv. (2006). Studijní materiály k projektu *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. Praha: JČMF. [www.suma.jcmf.cz, sekce Ke stažení.]
Hejný, M., Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál.
Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990.
Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.). (2004). *25 kapitol z didaktiky matematiky*, Praha: PedF UK v Praze.
Kubínová, M. (2005). *Klíč k matematice aneb Přijdu na to sám!* Praha: Albatros.
Littler, G., Benson, D. (2007). Pravidelnosti vedoucí k algebře. In *Náměty na podnětné vyučování matematice* (197–256). Praha: PedF UK v Praze.
Matěka, P. (2013). *Obtíže žáků při řešení vybraných slovních úloh z výzkumu TIMSS*. Praha: UK v Praze, PedF. [Diplomová práce, vedoucí N. Vondrová.]
Vondrová, N., Rendl, M. a kol. (V tisku). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Karolinum.
Tomášek, V., Potužníková, E., Frýzková, M. (2006). *Netradiční úlohy. Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA*. Ústav pro informace ve vzdělávání - divize Nakladatelství TAURIS.
Tomášek, V., a kol. (2008). *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.
Tomášek, V., a kol. (2009). *Výzkum TIMSS 2007.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

Tematický okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty*

Divíšek, J., Buřil, Z., Hájek, J., Kriţalkovič, K., Malinová, E., Zehnalová, J., Vasilková, E.(1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, Praha: SPN.
Koman, M., Tichá, M. (1989/90) K rozvíjení funkčního přístupu k řešení úloh na ZŠ. *Matematika a fyzika ve škole*, 20, s. 374-381.
Pejsar, Z., Svoboda, Z. (1990). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1.* Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta.
Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus.

Tematický okruhu Geometrie v rovině

Gardner, H.: Dimenze nyšlení, Portál, 1999
Průcha, J.: Moderní pedagogika, Portál, 2002
ČSN EN ISO 5456-3 Český normalizační institut, Praha, 2000
Noelen-Hoeksema, S. a kol.: Psychologie Atkinsonové a Hilgarda, Portál, 2012

Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Moscovich, I. *Nová kniha hlavolamů,* Perfekt, Bratislava 2009
Krejčová, E. *Hry a matematika na 1. stupni základní školy*, SPN, Praha 2009
Phillips, Ch. *Taktické myšlení - 50 cvičení, která změní způsob vašeho myšlení*, Grada, Praha 2012
Frýzková, M., Potužníková, E., Tomášek, V. *Netradiční úlohy; Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA,* Ústav pro informace ve vzdělávání, Praha 2006
Mída, J. *Díváme se kolem sebe, kopa matematických úloh pro žáky ZŠ a nižších tříd víceletých gymnázií,* Prometheus, Praha 1995
Korespondenční seminář Matýsek, Litomyšl (ročníky 2005, 2009, 2013) – upraveno

Žáci se speciálními vzdělávacími potřebami

Bartoňová, K.: *Kapitoly ze specifických poruch učení I., II.* Brno, Masarykova univerzita, 2007.
Blažková, R.: *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení.* Brno, Masarykova univerzita 2009.
Blažková, R.: *Dyskalkulie II. Poruchy učení v matematice na 2. stupni ZŠ.* Brno, Masarykova univerzita 2010.
Zelinková, O.: *Poruchy učení. Specifické poruchy čtení, psaní a dalších školních dovedností.* Praha, Portál 2003.
Zelinková, O.: *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací program.* Praha, Portál 2001.

Přílohy

Příloha 1

TABULKA TARIFŮ JÍZDNÉHO[13]

JEDNOTLIVÉ JÍZDENKY	**20 minut**	**60 minut**	**24 hodin**	**168 hodin (7-denní)**	**60 minut (prodej u řidiče)**
Osoba starší 16-ti let věku a důchodce do 70-ti let věku	**13,- Kč**	**16,- Kč**	**50,- Kč**	**190,- Kč**	**25,- Kč**
Děti od 6-ti do 15-ti let (včetně)	**6,- Kč**	**7,- Kč**	**20,- Kč**	**190,- Kč**	**10,- Kč**

SMS JÍZDENKY	**60 minut**	**24 hodin**
Osoba starší 16-ti let věku a důchodce do 70-ti let věku	**25,- Kč**	**70,- Kč**
Děti od 6-ti do 15-ti let (včetně)	**25,- Kč**	**70,- Kč**

HROMADNÉ JÍZDENKY	**CENA**	**DOBA PLATNOSTI**
Rodinná jízdenka pro max. 2 osoby starší 16-ti let a max. 3 děti do 15-ti let (včetně)	**100,- Kč**	**VÍKEND *)**
Hromadná školní jízdenka pro max. 30 dětí do 15-ti let (včetně) a max. 2 dospělé osoby jako doprovod	**200,- Kč**	**240 minut (4 hodiny)**

*) Rodinná jízdenka je platná v sobotu (SO) a neděli (NE) a ve státem uznaných svátcích (st. svátek).
Platnost jízdenky je od 00.00 hodin SO (st. svátek) do 24.00 hodin (NE) nebo konec st. svátku.
Tato jízdenka je platná pro max. 2 dospělé osoby a 3 osoby do 15 let věku (včetně).
Všechny jednotlivé jízdenky jsou přestupní.

[13] Převzato z http://www.dpmcb.cz/info-pro-cestujici/tarif-jizdneho-mhd/.

Příloha 2

Dopolední spoje do Českého Vrbného

	Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
27.9.	Pohůrka-kulturní dům	>	6:31		10
	Nádraží (vlakové a autobusové)	6:41	7:05		9
	České Vrbné	7:24			
	Celkový čas **53 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
Pohůrka-kulturní dům	>	8:06		13
Nádraží (vlakové a autobusové)	8:15	8:25		9
České Vrbné	8:44			
Celkový čas **38 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
Pohůrka-kulturní dům	>	9:31		13
Nádraží (vlakové a autobusové)	9:40	9:45		9
České Vrbné	10:04			
Celkový čas **33 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Večerní spoje na Pohůrku

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
České Vrbné		17:00		9
Nádraží (vlakové a autobusové)	17:20	17:39		10
Pohůrka-kulturní dům	17:48 >			
Celkový čas **48 min**, vzdálenost **11 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
České Vrbné		17:20		9
Nádraží (vlakové a autobusové)	17:40	18:00		13
Pohůrka-kulturní dům	18:09 >			
Celkový čas **49 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Příloha 3

Metodická řada k řešení lineárních rovnic

$$x+3=9 \qquad x-3=9$$
$$x-2=9 \qquad 9-x=5$$
$$2x=6 \qquad 12x=6$$
$$4x+5=37 \qquad 25-4x=5$$
$$4x-5=19 \qquad 34=50-4x$$
$$16=8+4x \qquad 5x+14=7x-4$$
$$\frac{x}{3}=1 \qquad \frac{x}{9}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{x}{2}=5 \qquad \frac{3u}{4}=6$$
$$\frac{20}{x}=4 \qquad 6=\frac{54}{x}$$
$$\frac{x}{10}=\frac{2}{5} \qquad 0{,}2y=\frac{2}{5}$$

$$3(x+5)=45 \qquad 5(x-4)=10$$
$$30+x=3(16+x)$$
$$2(x-1)+3(1-x)=4(x-2)-1$$
$$2(x-1)=10-3(x+1)$$

$$\frac{x+20}{3}\cdot 4=\frac{5x-20}{3}$$

$$\frac{1}{2}(x+2)-\frac{x}{3}-1=\frac{x+1}{6}-3$$