Učební texty ke konzultacím předmětu
Matematická analýza II pro kombinované studium

Konzultace první a druhá

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

e-mail: lsamkova@ pf.jcu.cz

webová stránka: home.pf.jcu.cz/~lsamkova/

Obsah kurzu: Exponenciální a logaritmické funkce.
Goniometrické a cyklometrické funkce. Limita funkce.
Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo. Průběh funkce.

Literatura:

— učebnice pro Gymnázia — např. Diferenciální a integrální počet, nakl. Prometheus
— Klůfa, Coufal: Matematika 1, učebnice VŠE
— Kaňka, Henzler: Matematika 2, učebnice VŠE
— Samková: Sbírka příkladů z matematiky, nakl. ČVUT

Nutnou podmínkou k účasti na zkoušce je odevzdání domácí práce (vypracování zadaných úloh). Z každé kapitoly učebních textů je nutno vypracovat 3 příklady.

Zkouška se skládá z ústní a písemné části.

Exponenciální a logaritmické funkce

Řešte rovnice a nerovnice:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $15 - 3 \cdot 5^{2x-1} = 0$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $2^{2x} \cdot 3^x = 144$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $16^{\frac{x}{x+3}} = 4 \cdot \left(\frac{2^x}{8}\right)^{\frac{1}{2x+5}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt[2x+3]{4^{3-x}} = 1024$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $3^{3x} \cdot 27 > \frac{1}{3}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} > \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $e^{x^2} < e^{-2x+3}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\frac{1}{3^{2x-5}} > 81$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $e^x < 1$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $e^x \geqq 0$

Řešte rovnice a nerovnice:

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\log_{\sqrt{2}}(64) = x$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $\log_2(x+2) \geqq 3$

$\boxed{\mathbf{14}}$ $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq 3$

$\boxed{\mathbf{15}}$ $\ln x < 2$

$\boxed{\mathbf{16}}$ $\ln|x| < 2$

$\boxed{\mathbf{17}}$ $\ln(e^4) = x$

$\boxed{\mathbf{18}}$ $\ln(\sqrt{e}) = x$

$\boxed{\mathbf{19}}$ $\ln x \geqq 0$

$\boxed{\mathbf{20}}$ $\ln|x| \geqq 0$

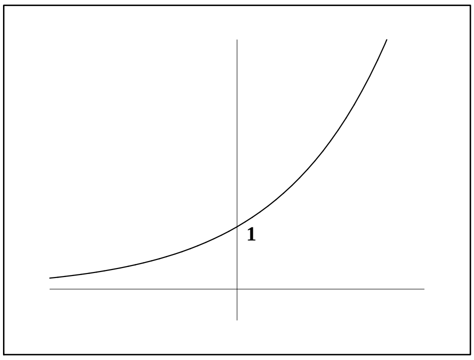
$\boxed{\mathbf{21}}$ $\log_2(\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)) = 0$

$\boxed{\mathbf{22}}$ $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

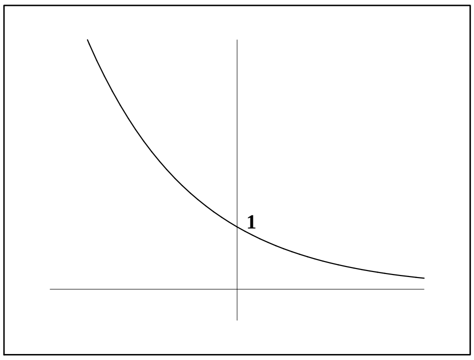
Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $x = 1$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = 2$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in \{-\frac{7}{3};\ 3\}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x = -\frac{12}{11}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\frac{4}{3}, \infty)$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $x \in (-3, 1)$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $x \in (-\infty, 0)$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $x = -3$; $\boxed{\mathbf{12}}$ $x = 12$; $\boxed{\mathbf{13}}$ $x \in \langle 6, \infty)$; $\boxed{\mathbf{14}}$ $x \in (-2, -\frac{15}{8}\rangle$; $\boxed{\mathbf{15}}$ $x \in (0, e^2)$; $\boxed{\mathbf{16}}$ $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$; $\boxed{\mathbf{17}}$ $x = 4$; $\boxed{\mathbf{18}}$ $x = \frac{1}{2}$; $\boxed{\mathbf{19}}$ $x \in \langle 1, \infty)$; $\boxed{\mathbf{20}}$ $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$; $\boxed{\mathbf{21}}$ $x = \frac{1}{8}$; $\boxed{\mathbf{22}}$ $x = 0$.

Typ: a^x pro $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$\boxed{a > 1}$



$\boxed{a < 1}$



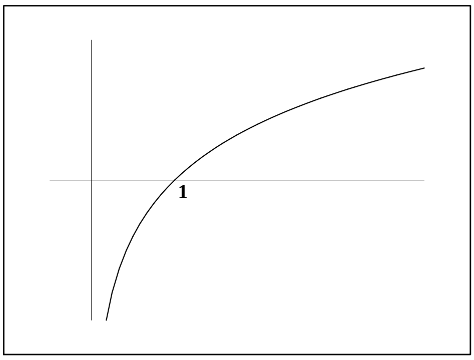
Pravidla pro počítání:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad (ab)^r = a^r \cdot b^r \qquad \sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$$

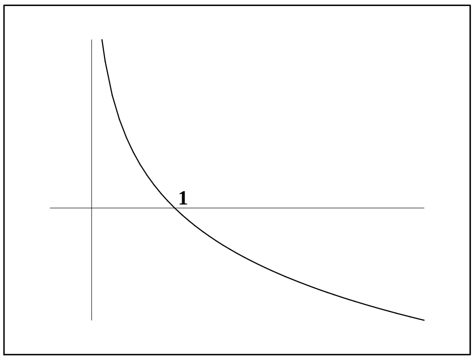
$$\left(\frac{1}{a}\right)^s = \frac{1}{a^s} = a^{-s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Typ: $\log_a(x)$ pro $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$\boxed{a > 1}$



$\boxed{a < 1}$



Definováno: $y = \log_a(x)$ právě tehdy, když $a^y = x$

Speciálně: $\ln x \equiv \log_e(x)$, $\log x \equiv \log_{10}(x)$

Pravidla pro počítání:

$$\log_a(A) + \log_a(B) = \log_a(A \cdot B) \qquad \log_a(A^k) = k \cdot \log_a(A) \qquad \log_a(a^k) = k$$

$$\log_a(A) - \log_a(B) = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) \qquad \log_a\left(\frac{1}{A}\right) = -\log_a(A) \qquad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Goniometrické funkce

Určete hodnoty:

1	$\sin\dfrac{\pi}{2}$	**2**	$\cos\dfrac{\pi}{3}$
3	$\sin\dfrac{\pi}{6}$	**4**	$\cos\dfrac{\pi}{4}$
5	$\sin\dfrac{2\pi}{3}$	**6**	$\cos(-\dfrac{\pi}{6})$
7	$\sin 0$	**8**	$\cos 0$
9	$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$	**10**	$\operatorname{tg}(-\dfrac{\pi}{3})$
11	$\sin(-\dfrac{\pi}{3})$	**12**	$\cos\pi$

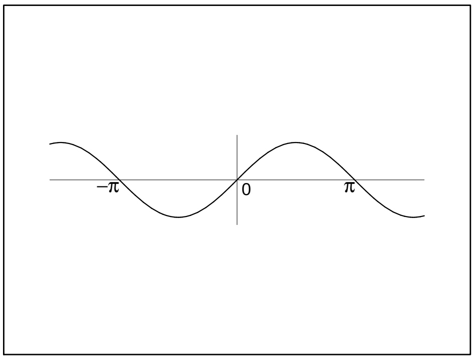
Výsledky: **1** 1; **2** $\frac{1}{2}$; **3** $\frac{1}{2}$; **4** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **5** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **6** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **7** 0; **8** 1; **9** 1; **10** $-\sqrt{3}$; **11** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **12** -1.

Řešte rovnice a nerovnice:

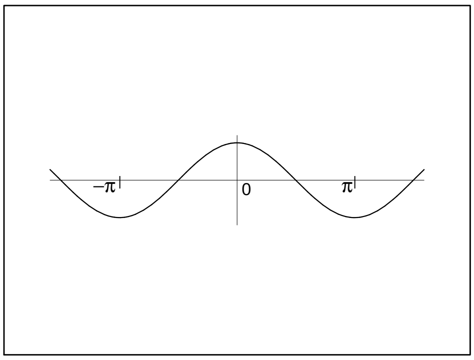
1	$\sin x = -\dfrac{1}{2}$	**2**	$\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3	$\operatorname{cotg} x = 1$	**4**	$\operatorname{cotg} x = -1$
5	$\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}} + \cos x = 0$	**6**	$2\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1$
7	$\cos x < 0$	**8**	$\sin x > 0$
9	$\cos x \geqq -\dfrac{1}{2}$	**10**	$\operatorname{tg} x \geqq -\sqrt{3}$
11	$\lvert\sin x\rvert \geqq \dfrac{1}{2}$	**12**	$\lvert\cos x\rvert < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Výsledky: **1** $\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi$; **2** $\frac{7\pi}{6}+4k\pi,\ \frac{\pi}{6}+4k\pi$; **3** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; **4** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; **5** $-\frac{\pi}{3}+k\pi$; **6** $\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$; **7** $x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$; **8** $x\in(2k\pi,\pi+2k\pi)$; **9** $x\in\langle\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{8\pi}{3}+2k\pi\rangle$; **10** $x\in\langle-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi)$; **11** $x\in(\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+k\pi)$; **12** $x\in(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{7\pi}{4}+2k\pi)$.

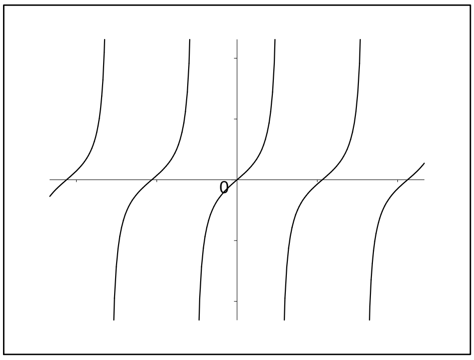
$\boxed{\sin x}$



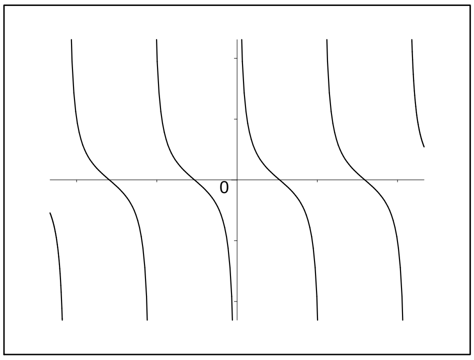
$\boxed{\cos x}$



$\boxed{\mathrm{tg}\, x}$



$\boxed{\mathrm{cotg}\, x}$



sin a cos jsou funkce 2π-periodické, tg a cotg jsou π-periodické;

$$D(\cos) = D(\sin) = \mathbb{R}$$

$$D(\mathrm{tg}\,) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \qquad D(\mathrm{cotg}\,) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, \pi + k\pi)$$

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x) = -\sin(-x) = \sin(2\pi + x)$$
$$\cos(x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(2\pi + x)$$

$$\mathrm{tg}\,(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,(x)}$$
$$\mathrm{cotg}\,(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,(x)}$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Cyklometrické funkce

Řešte rovnice:

$\boxed{1}$	$\arcsin x = \frac{\pi}{4}$	$\boxed{2}$	$\arccos x = \frac{\pi}{6}$	$\boxed{3}$	$\arcsin x = 0$
$\boxed{4}$	$\arccos x = 0$	$\boxed{5}$	$\arcsin x = \frac{\pi}{3}$	$\boxed{6}$	$\arccos x = \frac{2\pi}{3}$
$\boxed{7}$	$\arcsin x = -\frac{\pi}{3}$	$\boxed{8}$	$\arccos x = -\frac{\pi}{3}$	$\boxed{9}$	$\arcsin x = 1$
$\boxed{10}$	$\arcsin x = -\frac{\pi}{4}$	$\boxed{11}$	$\arccos x = \frac{\pi}{3}$	$\boxed{12}$	$\arcsin x = \frac{3\pi}{4}$
$\boxed{13}$	$\mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{3}$	$\boxed{14}$	$\mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{3}$	$\boxed{15}$	$\mathrm{arctg}\, x = 0$
$\boxed{16}$	$\mathrm{arccotg}\, x = 0$	$\boxed{17}$	$\mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{3}$	$\boxed{18}$	$\mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{4}$
$\boxed{19}$	$\mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{4}$	$\boxed{20}$	$\mathrm{arccotg}\, x = -\frac{\pi}{4}$	$\boxed{21}$	$\mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{4}$

Výsledky: $\boxed{1}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{3}$ 0; $\boxed{4}$ 1; $\boxed{5}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{6}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{7}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{8}$ nemá řešení; $\boxed{9}$ $\sin(1)$; $\boxed{10}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{11}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{12}$ nemá řešení; $\boxed{13}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{14}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\boxed{15}$ 0; $\boxed{16}$ nemá řešení; $\boxed{17}$ $-\sqrt{3}$; $\boxed{18}$ 1; $\boxed{19}$ 1; $\boxed{20}$ nemá řešení; $\boxed{21}$ -1.

$$\arcsin(x) = y \text{ pokud } y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \text{ a } \sin(y) = x$$
$$\arccos(x) = y \text{ pokud } y \in \langle 0; \pi \rangle \text{ a } \cos(y) = x$$
$$\mathrm{arctg}\,(x) = y \text{ pokud } y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \text{ a } \mathrm{tg}\,(y) = x$$
$$\mathrm{arccotg}\,(x) = y \text{ pokud } y \in (0; \pi) \text{ a } \mathrm{cotg}\,(y) = x$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$
$$\mathrm{arctg}\,(-x) = -\mathrm{arctg}\,(x)$$
$$\mathrm{arccotg}\,(-x) = \pi - \mathrm{arccotg}\,(x)$$
$$\mathrm{arccotg}\,(x) = \mathrm{arctg}\,(1/x) \text{ pro } x > 0$$

Limita funkce

Určete následující limity:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x-2}{(x+3)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+3}{1-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+9}{x^2+7x-9}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty} (1-3x^4-2x^3-x)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1-2x^3+x^2-17)$

7) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-7}{4x+3}$

9) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-4}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^4+2x^2+1}{4x^4-3x^3-1}$

11) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(1+2x)(2-3x)}{(x+1)(5x+1)}$

12) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x+1)^2\cdot(x-1)}{(2x^2+1)(x+2)}$

13) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x(x-3)}\right)$

14) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^4}{2x^3+1}-\dfrac{x}{2}\right)$

16) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-7}{1-x}+x\right)$

17) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

18) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}}{x}$

19) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}-3}$

20) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+5}}$

21) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(3x-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

22) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x^2-1}\right)$

23) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x\sqrt[4]{x}-3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}$

24) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x-2}$

25) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$

26) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

27) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{\sin x}$

28) $\lim\limits_{x\to 5+} \dfrac{\ln(x-5)}{\sqrt{x-5}}$

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1-\cos x}$

30) $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}$

31) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cos x}{x^2}$

32) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-\sin x)$

33) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x+\sin x}{x+4}$

34) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin\dfrac{1}{x}$

Výsledky: 1) neexistuje ($-\infty$ pro $x\to -1-$, ∞ pro $x\to -1+$); 2) $-\infty$; 3) neexistuje (∞ pro $x\to 1-$, $-\infty$ pro $x\to 1+$); 4) $-\frac{1}{9}$; 5) $-\infty$; 6) ∞; 7) 1; 8) $-\infty$; 9) 0; 10) $\frac{3}{4}$; 11) $-\frac{6}{5}$; 12) $\frac{1}{2}$; 13) $\frac{1}{3}$; 14) $\frac{1}{4}$; 15) 0; 16) -1; 17) 2; 18) $-\frac{1}{2}$; 19) $\sqrt{3}$; 20) $\frac{3}{2}$; 21) ∞; 22) $-\infty$; 23) 0; 24) 1; 25) 0; 26) $\frac{4}{3}$; 27) $-\infty$; 28) $-\infty$; 29) ∞; 30) ∞; 31) 0; 32) $-\infty$; 33) 2; 34) 0.

Neurčité (”problémové”) výrazy : $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$, 1^{∞}, $1^{-\infty}$, ∞^0, 0^0.

”Bezproblémové” výrazy : $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0+} = \infty$, $\frac{1}{0-} = -\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $1^0 = 1$, $\infty^{\infty} = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$, $(0+)^{\infty} = 0$, $(0+)^{-\infty} = \infty$, $\frac{\infty}{0+} = \infty \cdot \frac{1}{0+} = \infty$, $\frac{\infty}{0-} = \infty \cdot \frac{1}{0-} = -\infty$, $5 \cdot \infty = \infty$, $(-5) \cdot \infty = -\infty$, $\sqrt{\infty} = \infty$, $\sqrt[3]{\infty} = \infty$, $\sqrt[3]{-\infty} = -\infty$, ……

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x)-g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$\lim_{x\to a}\Big(\alpha\cdot f(x)\Big) = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\lim_{x\to a} \sin\big(f(x)\big) = \sin\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

podobně pro funkce $\cos, \arcsin, a^x, ...$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

pro $a > 0$ platí :
$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pokud } a > 1 \\ 0 & \text{pokud } a < 1 \end{cases}$$

Věta o policajtech: Pokud je splněno $g \leqq f \leqq h$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, tak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Derivace funkce

Určete derivaci následujících funkcí (včetně podmínek):

1) $x^6 - \dfrac{x}{9}$	2) $\sqrt[3]{x^2}$	3) $\dfrac{1}{x^5}$	4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$
5) $x\sqrt[3]{x}$	6) $\dfrac{3-x^2}{5}$	7) $\dfrac{x^2-1}{x^3}$	8) $x \cdot \ln x$
9) $x^2 \cdot \cos x$	10) $(x+4)\cdot\sqrt[3]{x}$	11) $x \cdot \operatorname{arctg} x$	12) $\dfrac{2x-3}{3x+1}$
13) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$	14) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$	15) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	16) $\dfrac{x^2}{\ln x}$
17) $\ln(5x+3)$	18) $\ln(1-x)$	19) e^{3x+5}	20) e^{-x}
21) $e^{\sin x}$	22) $\operatorname{cotg}(2x-\pi)$	23) $(2x+5)^5$	24) $(3x+2)^2$
25) $(7-x)^3$	26) $\dfrac{1}{3x+4}$	27) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$	28) $\sqrt{3x-1}$
29) $\sin(x^3)$	30) $\cos^2 x$	31) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$	32) $\cos^4(3x-\pi)$
33) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$	34) $\ln\dfrac{1}{x}$	35) $x^2\cdot e^{-x}$	36) $\operatorname{arctg}(\sqrt{x})$

Výsledky: 1) $6x^5 - \frac{1}{9}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$; 3) $-\frac{5}{x^6}$, $x \neq 0$; 4) $-\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$, $x > 0$; 5) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$; 6) $-\frac{2x}{5}$, $x \in \mathbb{R}$; 7) $\frac{3-x^2}{x^4}$, $x \neq 0$; 8) $\ln x + 1$, $x > 0$; 9) $2x\cos x - x^2 \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; 10) $\frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x \neq 0$; 11) $\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; 12) $\frac{11}{(3x+1)^2}$, $x \neq -\frac{1}{3}$; 13) $\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$, $x \neq \pm 1$; 14) $-\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$; 15) $\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$, $x > 0$; 16) $\frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$, $x \in (0,1)\cup(1,\infty)$; 17) $\frac{5}{5x+3}$, $x > -\frac{3}{5}$; 18) $-\frac{1}{1-x}$, $x < 1$; 19) $3e^{3x+5}$, $x \in \mathbb{R}$; 20) $-e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$; 21) $\cos x \cdot e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$; 22) $-\frac{2}{\sin^2(2x-\pi)}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$; 23) $10(2x+5)^4$, $x \in \mathbb{R}$; 24) $6(3x+2)$, $x \in \mathbb{R}$; 25) $-3(7-x)^2$, $x \in \mathbb{R}$; 26) $-\frac{3}{(3x+4)^2}$, $x \neq -\frac{4}{3}$; 27) $-\frac{2}{(x-2)^3}$, $x \neq 2$; 28) $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$, $x > \frac{1}{3}$; 29) $3x^2\cos(x^3)$, $x \in \mathbb{R}$; 30) $-2\cos x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; 31) $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$, $x \neq \pi + 2k\pi$;
32) $-12\cos^3(3x-\pi)\cdot\sin(3x-\pi)$, $x \in \mathbb{R}$; 33) $-\frac{2}{x^2-1}$, $x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; 34) $-\frac{1}{x}$, $x > 0$; 35) $x(2-x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$; 36) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, $x > 0$.

$$\big(f+g\big)' = f' + g' \qquad \big(f-g\big)' = f' - g'$$

$$\big(f\cdot g\big)' = f'\cdot g + f\cdot g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$\big(\alpha\cdot f\big)' = \alpha\cdot f',\ \ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x\cdot\ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x)' = 1$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\text{číslo})' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

l'Hospitalovo pravidlo — využití derivací při počítání limit.

Je-li limita typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, potom

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita vpravo existuje.

l'Hospitalovo pravidlo

Určete limity:

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$	**2** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$	**3** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$	**5** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$	**6** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$
7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$	**8** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$	**9** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x}$
10 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$	**11** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$	**12** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$
13 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{\ln x}$	**14** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin(x-4)}{16-x^2}$	**15** $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$
16 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$	**17** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x+\sin(3x)}{4x}$	**18** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$
19 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^x}{x+\operatorname{tg}(x^2)}$	**20** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$	**21** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$
22 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-3x+2}$	**23** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$	**24** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$
25 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+9}{x^2+7x-9}$	**26** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{2x^2+2x-60}$	**27** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$

Výsledky: **1** 1; **2** $\frac{1}{2}$; **3** 1; **4** -1; **5** 1; **6** 1; **7** 1; **8** 1; **9** ∞; **10** ∞; **11** 0; **12** 0; **13** 2; **14** $-\frac{1}{8}$; **15** $\frac{1}{e}$; **16** $\frac{5}{2}$; **17** 2; **18** 2; **19** 1; **20** 2; **21** 2; **22** 0; **23** neexistuje ($-\infty$ pro $x\to 2-$, ∞ pro $x \to 2+$); **24** 0; **25** $-\frac{1}{9}$; **26** $\frac{3}{22}$; **27** 4.