Učební texty ke konzultacím předmětu
Matematická analýza II pro kombinované studium

Konzultace třetí

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

e-mail: lsamkova@ pf.jcu.cz

webová stránka: home.pf.jcu.cz/~lsamkova/

Nutnou podmínkou k účasti na zkoušce je odevzdání domácí práce (vypracování zadaných úloh). Z každé kapitoly učebních textů je nutno vypracovat 3 příklady.

Zkouška se skládá z ústní a písemné části.

Průběh funkce

Doporučený postup při vyšetřování průběhu funkce:

(1) Definiční obor
(2) Sudá, lichá, periodická
(3) Limity v krajních bodech definičního oboru
(4) 1. derivace
(5) Podezřelé body na extrém: buď $f'(x)$ není definováno nebo $f'(x) = 0$
(6) Tabulka pro 1. derivaci
(7) 2. derivace
(8) Podezřelé body na inflexi: buď $f'(x)$ není definováno nebo $f''(x)$ není definováno nebo $f''(x) = 0$
(9) Tabulka pro 2. derivaci
(10) Funkční hodnoty v podezřelých bodech, popř. průsečíky s osami x, y
(11) Asymptoty
(12) Graf

Vysvětlení (připomenutí) některých termínů:

`Sudá funkce`: $f(-x) = f(x)$, $D(f)$ je symetrický podle 0, graf je symetrický podle osy y. Stačí vyšetřovat $x \geqq 0$.

`Lichá funkce`: $f(-x) = -f(x)$, $D(f)$ je symetrický podle 0, graf je symetrický podle počátku (bodu [0;0]). Stačí vyšetřovat $x \geqq 0$.

`Svislá asymptota`: Existuje, pokud v nějakém bodě a je $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$. Rovnice asymptoty je potom $x = a$.

`Vodorovná asymptota` (v $+\infty$): Existuje, pokud $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \neq \pm\infty$. Rovnice asymptoty je potom $y = b$.

`Vodorovná asymptota` (v $-\infty$): Existuje, pokud $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \neq \pm\infty$. Rovnice asymptoty je potom $y = b$.

`Šikmá asymptota` (v $+\infty$): Existuje jen, když neexistuje vodorovná asymptota; navíc musí existovat následující dvě limity:

$$k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q := \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - k\cdot x\big).$$

Je-li $k \neq \pm\infty$, $q \neq \pm\infty$, je rovnice asymptoty $y = kx + q$.
Podobně pro šikmou asymptotu v $-\infty$.

`Tečna ke grafu funkce` f (`v bodě` x_0): Existuje vždy, když v bodě x_0 existuje první derivace. Rovnice asymptoty je potom

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Příklady:

Vyšetřete průběh funkce, včetně asymptot. U příkladů označených hvězdičkou určete rovnice tečen v inflexních bodech:

1* $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

2* $f(x) = x^4 - 4x^3$

3* $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

4* $f(x) = (x+1)(x-2)^2$

5 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

6* $f(x) = \dfrac{x^3}{6x-12}$

7 $f(x) = \dfrac{x(x+6)}{x+2}$

8 $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$

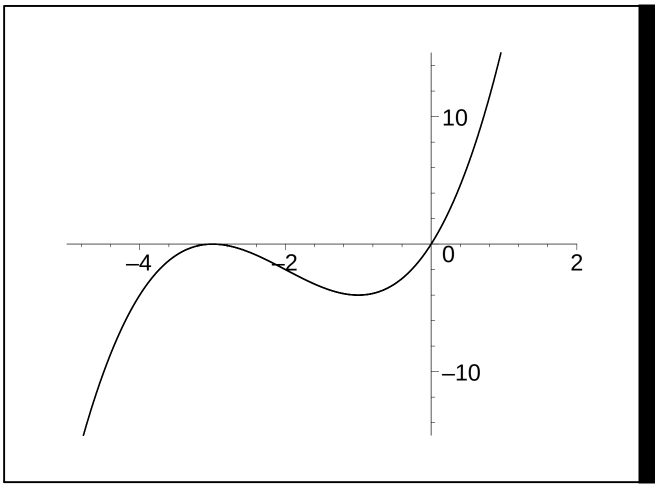
9* $f(x) = \dfrac{6(x^2-1)}{x^2+3}$

10 $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$

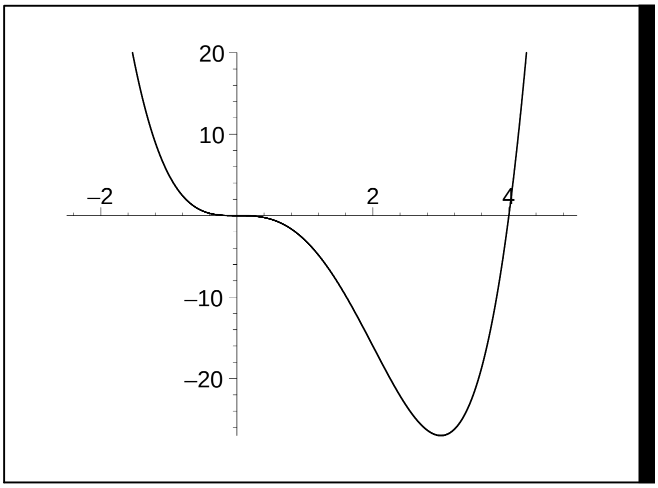
11 $f(x) = x \ln x$

Výsledky:

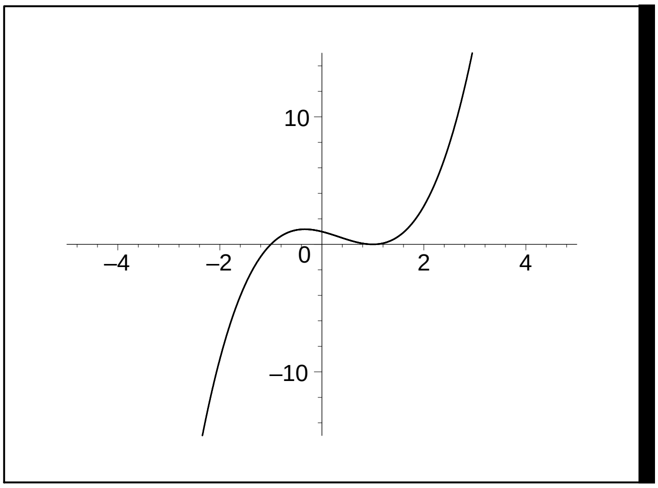
1 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$;
$D(f) = (-\infty, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = 3(x^2 + 4x + 3)$;
rostouci na $(-\infty, -3)$, $(-1, \infty)$,
klesající na $(-3, -1)$;
$f''(x) = 6x + 12$;
konvexní na $(-2, \infty)$,
konkávní na $(-\infty, -2)$;
asymptoty nejsou;
inflexní bod: $[-2, -2]$,
tečna v inflexním bodě:
$y = -3x - 8$.



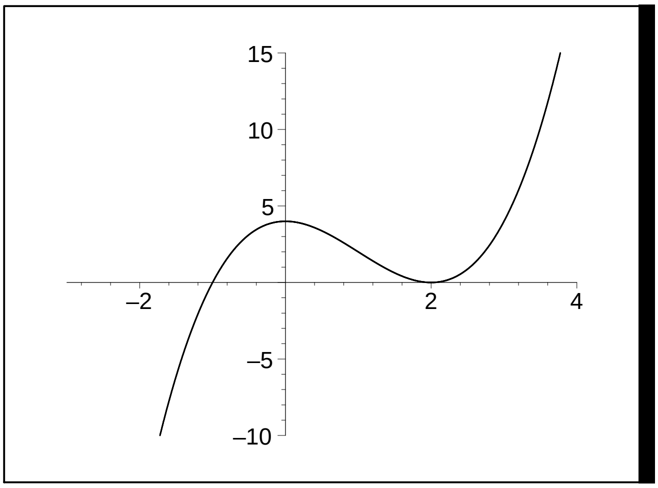
2 $f(x) = x^4 - 4x^3$;
$D(f) = (-\infty, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = 4x^2(x-3)$;
rostoucí na $(3, \infty)$,
klesající na $(-\infty, 3)$;
$f''(x) = 12x(x-2)$;
konvexní na $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$,
konkávní na $(0, 2)$;
asymptoty nejsou;
inflexní body: $[0, 0]$, $[2, -16]$,
tečny v inflexních bodech:
$y = 0$, $y = -16x + 16$.



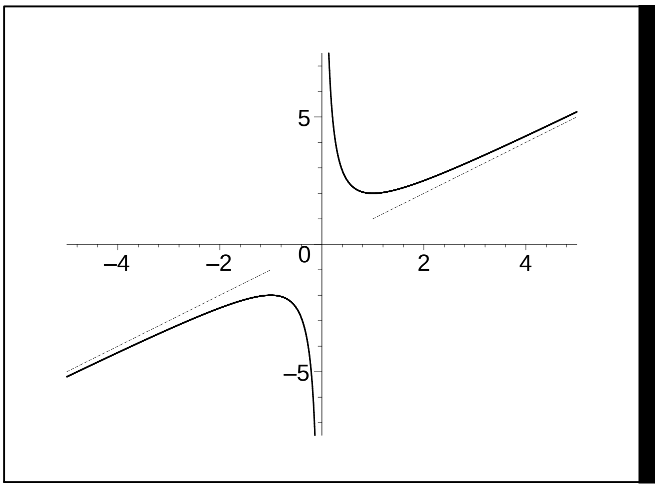
$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$;
$D(f) = (-\infty, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$;
rostoucí na $(-\infty, -\frac{1}{3})$, $(1, \infty)$,
klesající na $(-\frac{1}{3}, 1)$;
$f''(x) = 6x - 2$;
konvexní na $(\frac{1}{3}, \infty)$,
konkávní na $(-\infty, \frac{1}{3})$;
asymptoty nejsou;
inflexní bod: $[\frac{1}{3}, \frac{14}{27}]$,
tečna v inflexním bodě:
$y = -\frac{4}{3}x + \frac{28}{27}$.



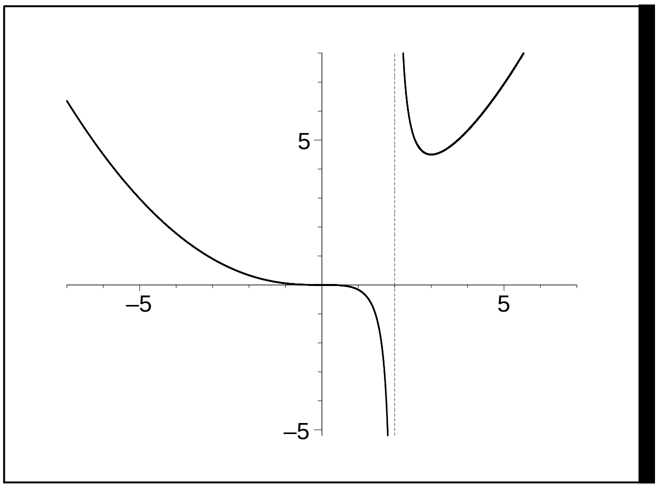
$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$;
$D(f) = (-\infty, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = 3x(x - 2)$;
rostoucí na $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$,
klesající na $(0, 2)$;
$f''(x) = 6x - 6$;
konvexní na $(1, \infty)$,
konkávní na $(-\infty, 1)$;
asymptoty nejsou;
inflexní bod: $[1, 2]$,
tečna v inflexním bodě:
$y = -3x + 5$.



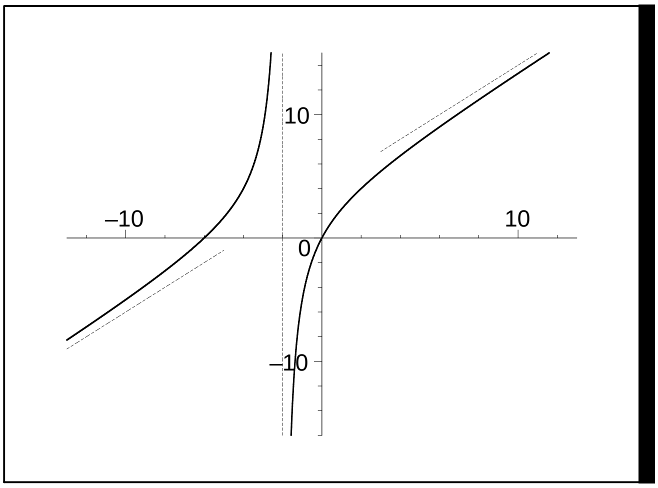
$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
lichá funkce;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to0-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to0+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$;
rostoucí na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$,
klesající na $(-1, 0)$, $(0, 1)$;
$f''(x) = \frac{1}{x^3}$;
konvexní na $(0, \infty)$,
konkávní na $(-\infty, 0)$;
asymptoty: $x = 0$, $y = x$.



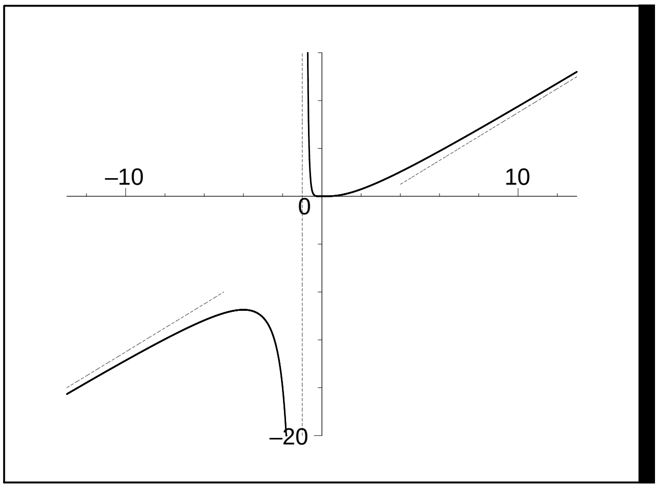
6 $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$;
$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to 2+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{3(x-2)^2}$;
rostoucí na $(3, \infty)$,
klesající na $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$;
$f''(x) = \frac{x(x^2-6x+12)}{3(x-2)^3}$;
konvexní na $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$,
konkávní na $(0, 2)$;
asymptoty: $x = 2$;
inflexní bod: $[0, 0]$,
tečna v inflexním bodč: $y = 0$.



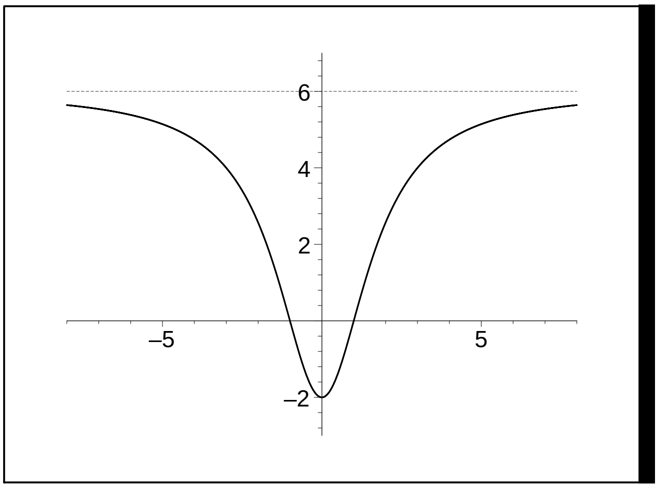
7 $f(x) = \frac{x(x+6)}{x+2}$;
$D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to -2-} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to -2+} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = \frac{x^2+4x+12}{(x+2)^2}$;
rostoucí na $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$;
$f''(x) = -\frac{16}{(x+2)^3}$;
konvexní na $(-\infty, -2)$,
konkávní na $(-2, \infty)$;
asymptoty: $x = -2$,
$y = x + 4$.



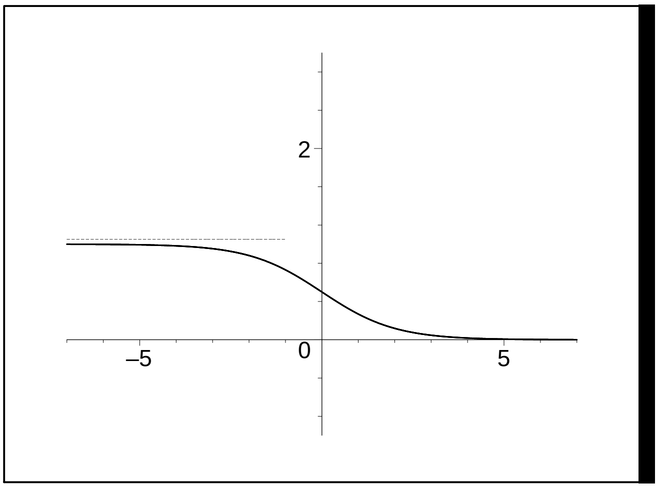
8 $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$;
$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to -1-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to -1+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$;
rostoucí na $(-\infty, -4)$, $(0, \infty)$,
klesající na $(-4, -1)$, $(-1, 0)$;
$f''(x) = \frac{12x^2}{(x+1)^5}$;
konvexní na $(-1, \infty)$,
konkávní na $(-\infty, -1)$;
asymptoty: $x = -1$, $y = x - 3$.



$\boxed{\mathbf{9}}$ $f(x) = \frac{6(x^2-1)}{x^2+3}$;
$D(f) = (-\infty, \infty)$;
sudá funkce;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 6$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 6$;
$f'(x) = \frac{48x}{(x^2+3)^2}$;
rostoucí na $(0, \infty)$,
klesající na $(-\infty, 0)$;
$f''(x) = \frac{144(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$;
konvexní na $(-1, 1)$,
konkávní na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$;
asymptoty: $y = 6$;
inflexní body: $[-1, 0]$, $[1, 0]$,
tečny v inflexních bodech:
$y = -3x - 3$, $y = 3x - 3$.



$\boxed{\mathbf{10}}$ $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$;
$D(f) = (-\infty, \infty)$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$;
$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$;
klesajc na $(-\infty, \infty)$;
$f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$;
konvexn na $(0, \infty)$,
konkvn na $(-\infty, 0)$;
asymptoty: $y = 1$,
$y = 0$.



$\boxed{\mathbf{11}}$ $f(x) = x \ln x$;
$D(f) = (0, \infty)$;
$\lim_{x\to0+} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$f'(x) = \ln x + 1$;
rostouc na $(\frac{1}{e}, \infty)$,
klesajc na $(0, \frac{1}{e})$;
$f''(x) = \frac{1}{x}$;
konvexn na $(0, \infty)$;
asymptoty nejsou.