Učební texty ke konzultacím předmětu
Matematická analýza I pro kombinované studium

Konzultace první a druhá

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

e-mail: lsamkova@ pf.jcu.cz

webová stránka: home.pf.jcu.cz/~lsamkova/

Obsah kurzu: Elementární funkce jedné reálné proměnné a jejich vlastnosti. Teorie limit posloupností reálných čísel. Geometrické řady.

Literatura:
— učebnice pro Gymnázia, např. **Funkce**, **Posloupnosti a řady**, nakl. Prometheus
— Petrášková, Zmeškalová: **Algebraické funkce**, nakl. PF JU

Zápočet se uděluje na základě odevzdání domácí práce (vypracování zadaných úloh). Z každé kapitoly učebních textů je nutno vypracovat 3 příklady. Plus příklady uvedené za poslední kapitolou.

Zkouška se skládá z ústní a písemné části. Nutnou podmínkou k účasti na zkoušce je získání zápočtu.

Kvadratické funkce

Řešte nerovnice v $\mathbb{R}$:

1	$x^2 - 3x - 28 \leqq 0$	**2**	$x^2 + 8x + 16 \leqq 0$
3	$x^2 - 2x - 15 \geqq 0$	**4**	$-2x^2 - 5x + 12 > 0$
5	$9x^2 - 6x + 1 \leqq 0$	**6**	$x^2 + 2x + 6 < 0$
7	$x^2 + 2x + 6 \geqq 0$	**8**	$(x+2)(4-x) \leqq 0$
9	$\dfrac{4x-3}{7+x} \geqq 0$	**10**	$\dfrac{2x^2+1}{(x-2)(x+1)} \leqq 0$
11	$\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} < 0$	**12**	$\dfrac{x^2-3x-4}{x+1} < 0$
13	$\dfrac{x-1}{2-x} \geqq 1$	**14**	$\dfrac{x+2}{x+3} > 2$

Určete parametr $m \in \mathbb{R}$ tak, aby daná rovnice měla

15	dva reálné různé kořeny :	$x^2 + 2x + m^2 = 0$
16	jeden dvojnásobný kořen :	$x^2 - (1-m) \cdot x + 1 = 0$
17	pouze nereálné kořeny :	$9x^2 - 6mx + 9m = 0$
18	dva různé záporné kořeny :	$x^2 + 2mx + m^2 - 8 = 0$
19	jeden kořen :	$(m-1) \cdot x^2 + 2(m+1) \cdot x + m - 2 = 0$
20	jeden nebo dva reálné kořeny :	$5x^2 + (4m-10) \cdot x + m^2 - m + 15 = 0$

Výsledky: **1** $x \in \langle -4, 7 \rangle$; **2** $x = -4$; **3** $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 5, \infty)$; **4** $x \in (-4, \frac{3}{2})$; **5** $x = \frac{1}{3}$; **6** $x \in \emptyset$; **7** $x \in \mathbb{R}$; **8** $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 4, \infty)$; **9** $x \in (-\infty, -7) \cup \langle \frac{3}{4}, \infty)$; **10** $x \in (-1, 2)$; **11** $x \in (-4, -1) \cup (-1, 6)$; **12** $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 4)$; **13** $x \in \langle \frac{3}{2}, 2)$; **14** $x \in (-4, -3)$; **15** $m \in (-1, 1)$; **16** $m \in \{-1; 3\}$; **17** $m \in (0, 9)$; **18** $m \in (\sqrt{8}, \infty)$; **19** $m \in \{1; \frac{1}{5}\}$; **20** $m \in \langle -10, -5 \rangle$.

Typ: $ax^2 + bx + c = 0$ pro $a \neq 0$

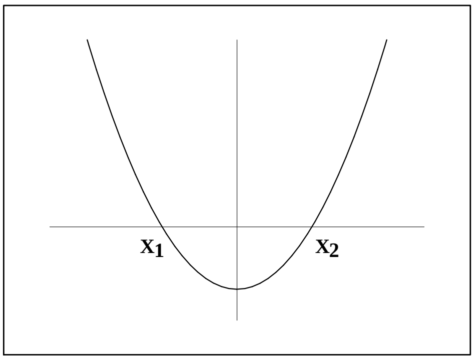
Diskriminant: $D = b^2 - 4ac$

$\boxed{D > 0}$

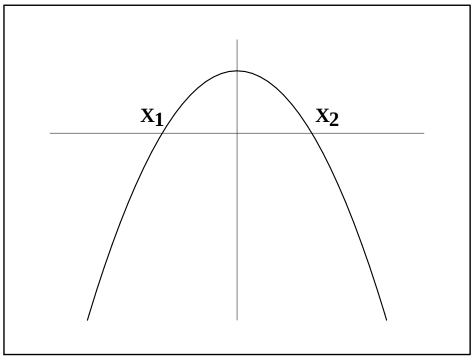
2 reálná řešení $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$\boxed{a > 0}$



$\boxed{a < 0}$

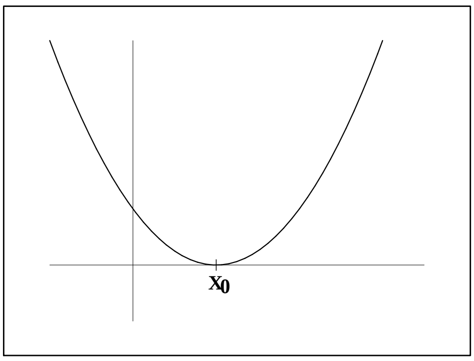


$\boxed{D = 0}$

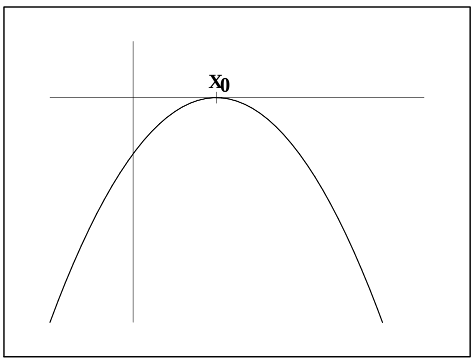
1 reálné řešení $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

$\boxed{a > 0}$



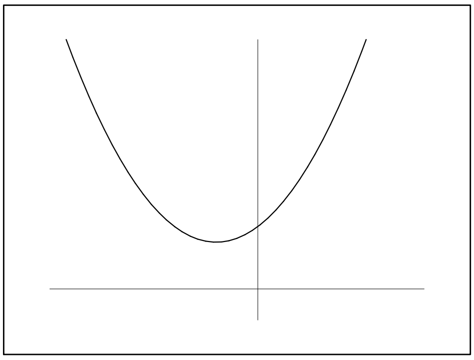
$\boxed{a < 0}$



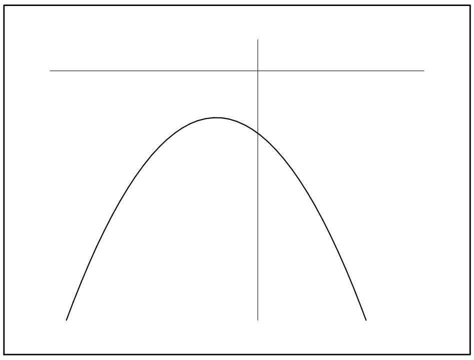
$\boxed{D < 0}$ žádné reálné řešení

rozklad na součin neexistuje

$\boxed{a > 0}$



$\boxed{a < 0}$



Absolutní hodnota

Řešte rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $|x-3| = 9$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $|x^2+3x-2| = 2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\left|\dfrac{x+4}{x-2}\right| = 1$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $|x-3| < 2$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $|2-3x| \geqq 1$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\left|\dfrac{1}{x}\right| \geqq 2$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\left|\dfrac{x+2}{1-x}\right| \leqq 1$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $|x^2-7x+15| < 9$

Řešte rovnice a nerovnice (intervalovou metodou):

$\boxed{\mathbf{9}}$ $|x-1|+|x-2| = 1$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $|2x+1| = |x-1|+2$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $|x|-2|x+1|+3|x+2| = 0$

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\dfrac{(5x-3)(x+4)}{x(6-x)} \leqq 0$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $\dfrac{1-2x}{(x-1)(x+1)} < 0$

$\boxed{\mathbf{14}}$ $\dfrac{x^2-3x-4}{x-1} \geqq 0$

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in \{-6;\ 12\}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \{-4;\ -3;\ 0;\ 1\}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x = -1$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in (1,5)$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\infty, \frac{1}{3}\rangle \cup \langle 1, \infty)$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $x \in \langle -\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}\rangle$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $x \in (1,6)$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $x \in \langle 1, 2\rangle$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $x \in \{-4;\ \frac{2}{3}\}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $x = -2$; $\boxed{\mathbf{12}}$ $x \in (-\infty, -4\rangle \cup (0, \frac{3}{5}\rangle \cup (6, \infty)$; $\boxed{\mathbf{13}}$ $x \in (-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$; $\boxed{\mathbf{14}}$ $x \in \langle -1, 1) \cup \langle 4, \infty)$.

Rovnice s abs. hodnotou:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro} \quad a \geqq 0 \\ -a & \text{pro} \quad a \leqq 0 \end{cases}$$

pro $b \geqq 0$:	$\vert\star\vert = b$	$\Longrightarrow$	$\star = b$ nebo $\star = -b$
pro $b < 0$:	$\vert\star\vert = b$	$\Longrightarrow$	nemá řešení

Nerovnice s abs. hodnotou:

pro $b > 0$:	$\vert\star\vert < b$	$\Longrightarrow$	$-b < \star < b$
	$\vert\star\vert > b$	$\Longrightarrow$	$\star < -b$ nebo $\star > b$
pro $b < 0$:	$\vert\star\vert < b$	$\Longrightarrow$	nemá řešení
	$\vert\star\vert > b$	$\Longrightarrow$	je splněno vždy
pro $b = 0$:	$\vert\star\vert < b$	$\Longrightarrow$	nemá řešení
	$\vert\star\vert > b$	$\Longrightarrow$	$\star \neq 0$

Mocniny a odmocniny

Zjednodušte. U příkladů s hvězdičkou výsledek také zapište jako mocninu x:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \cdot x^3$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x^3 \cdot \dfrac{1}{x^6}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(x^3)^4$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $(x^3)^{\frac{1}{2}}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(x^3 \cdot y)^5$ $\boxed{\mathbf{6}}$ $\dfrac{x^2 \cdot x^7}{x^3 \cdot x^4}$

$\boxed{\mathbf{7}}^*$ $\dfrac{x \cdot x^2 \cdot x^3}{x^7}$ $\boxed{\mathbf{8}}^*$ $x \cdot \sqrt[3]{x}$ $\boxed{\mathbf{9}}^*$ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \sqrt[3]{x}$

$\boxed{\mathbf{10}}^*$ $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$ $\boxed{\mathbf{11}}^*$ $\dfrac{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}{x \cdot \sqrt{x}}$ $\boxed{\mathbf{12}}$ $(\sqrt[4]{x} - \sqrt{x})^2$

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ x^4, $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$; $\boxed{\mathbf{3}}$ x^{12}, $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x^{\frac{3}{2}}$, $x \geqq 0$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x^{15} \cdot y^5$, $x, y \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{6}}$ x^2, $x \neq 0$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $\sqrt[3]{x^4}$, $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $\sqrt[12]{x}$, $x > 0$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $\sqrt[12]{x^{23}}$, $x \geqq 0$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $\sqrt[4]{x^3}$, $x > 0$; $\boxed{\mathbf{15}}$ $\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x^3} + x$, $x \geqq 0$.

*Výsledky: $\boxed{\mathbf{7}}$ x^{-1}; $\boxed{\mathbf{8}}$ $x^{\frac{4}{3}}$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $x^{\frac{1}{12}}$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $x^{\frac{23}{12}}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $x^{\frac{3}{4}}$.

Řešte rovnice s odmocninou:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt[4]{x+2} = 2$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt[3]{x+1} = -2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt[5]{2-x} = 1$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{5-x} = x+1$

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $x = 14$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = -9$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x = 1$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x = 1$.

Platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad (ab)^r = a^r \cdot b^r \qquad \sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^s = \frac{1}{a^s} = a^{-s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Pro n liché je $\sqrt[n]{x}$ definováno pro $x \in \mathbb{R}$, pro n sudé je $\sqrt[n]{x}$ definováno pro $x \geqq 0$.

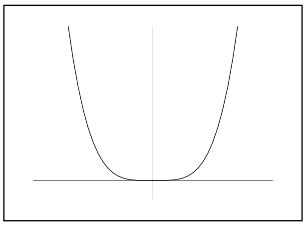
Pro $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Pro $x \in \mathbb{R}$:

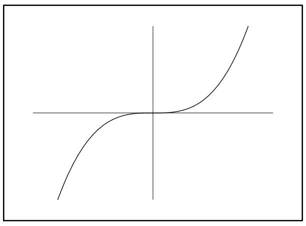
$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{array}{l} \sqrt{x^2} = x \text{ pro } x \geqq 0 \\ \sqrt{x^2} = -x \text{ pro } x < 0 \end{array}$$

POZOR! $\quad (a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2$, $\quad$ ale $\quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

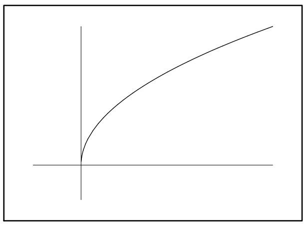
$\boxed{x^4}$



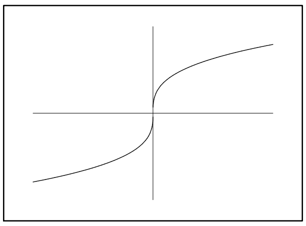
$\boxed{x^3}$



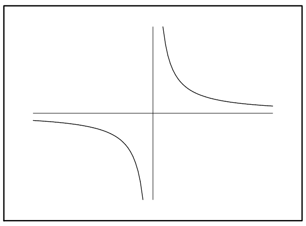
$\boxed{\sqrt{x}}$



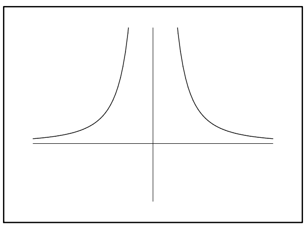
$\boxed{\sqrt[3]{x}}$



$\boxed{\frac{1}{x}}$



$\boxed{\frac{1}{x^2}}$



Exponenciální a logaritmické funkce

Řešte rovnice a nerovnice:

$\boxed{1}$ $15 - 3 \cdot 5^{2x-1} = 0$

$\boxed{2}$ $2^{2x} \cdot 3^x = 144$

$\boxed{3}$ $16^{\frac{x}{x+3}} = 4 \cdot \left(\frac{2^x}{8}\right)^{\frac{1}{2x+5}}$

$\boxed{4}$ $\sqrt[2x+3]{4^{3-x}} = 1024$

$\boxed{5}$ $3^{3x} \cdot 27 > \frac{1}{3}$

$\boxed{6}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} > \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x$

$\boxed{7}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+3}$

$\boxed{8}$ $\frac{1}{3^{2x-5}} > 81$

Řešte rovnice a nerovnice:

$\boxed{9}$ $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$

$\boxed{10}$ $\log_{\sqrt{2}}(64) = x$

$\boxed{11}$ $\log_2(\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)) = 0$

$\boxed{12}$ $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

$\boxed{13}$ $\log_2(x+2) \geqq 3$

$\boxed{14}$ $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq 3$

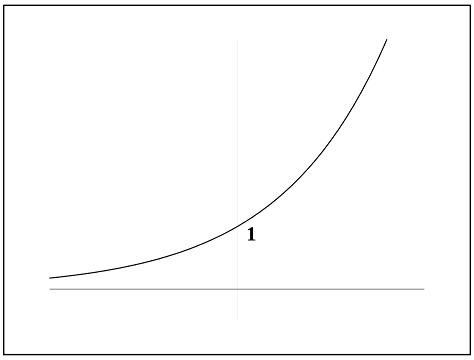
$\boxed{15}$ $\log|x| < 2$

$\boxed{16}$ $1 \leqq |\log_3 x| \leqq 2$

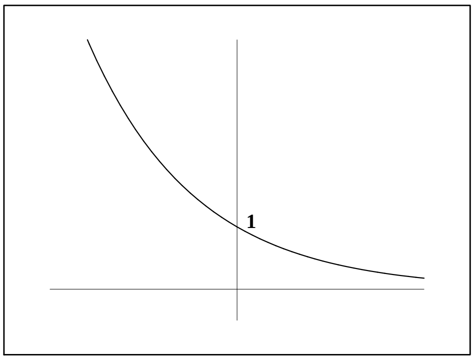
Výsledky: $\boxed{1}$ $x = 1$; $\boxed{2}$ $x = 2$; $\boxed{3}$ $x \in \{-\frac{7}{3};\ 3\}$; $\boxed{4}$ $x = -\frac{12}{11}$; $\boxed{5}$ $x \in (-\frac{4}{3}, \infty)$; $\boxed{6}$ $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$; $\boxed{7}$ $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$; $\boxed{8}$ $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; $\boxed{9}$ $x = -3$; $\boxed{10}$ $x = 12$; $\boxed{11}$ $x = \frac{1}{8}$; $\boxed{12}$ $x = 0$; $\boxed{13}$ $x \in \langle 6, \infty)$; $\boxed{14}$ $x \in (-2, -\frac{15}{8}\rangle$; $\boxed{15}$ $x \in (-100, 0) \cup (0, 100)$; $\boxed{16}$ $x \in \langle \frac{1}{9}, \frac{1}{3}\rangle \cup \langle 3, 9\rangle$.

Typ: a^x pro $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$\boxed{a > 1}$



$\boxed{a < 1}$



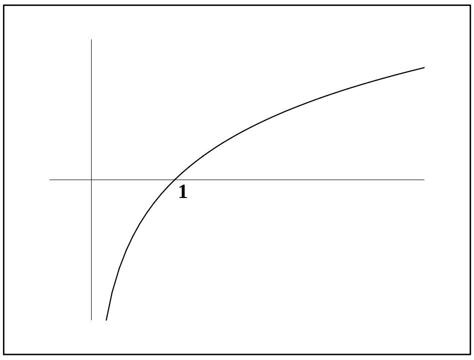
Pravidla pro počítání:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $(ab)^r = a^r \cdot b^r$ $\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$

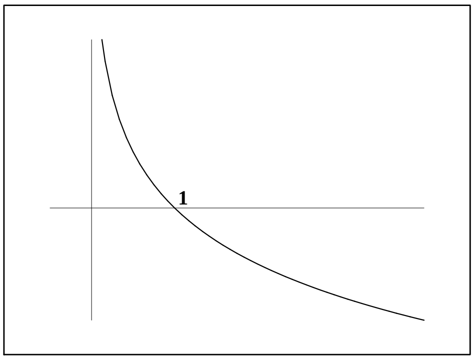
$\left(\frac{1}{a}\right)^s = \frac{1}{a^s} = a^{-s}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-s}$ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Typ: $\log_a(x)$ pro $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$\boxed{a > 1}$



$\boxed{a < 1}$



Definováno: $y = \log_a(x)$ právě tehdy, když $a^y = x$

Speciálně: $\ln x \equiv \log_e(x)$, $\log x \equiv \log_{10}(x)$

Pravidla pro počítání:

$\log_a(A) + \log_a(B) = \log_a(A \cdot B)$ $\log_a(A^k) = k \cdot \log_a(A)$ $\log_a(a^k) = k$

$\log_a(A) - \log_a(B) = \log_a\left(\frac{A}{B}\right)$ $\log_a\left(\frac{1}{A}\right) = -\log_a(A)$ $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Goniometrické funkce

Určete hodnoty:

$\boxed{\mathbf{1}}$	$\sin\dfrac{\pi}{2}$	$\boxed{\mathbf{2}}$	$\cos\dfrac{\pi}{3}$
$\boxed{\mathbf{3}}$	$\sin\dfrac{\pi}{6}$	$\boxed{\mathbf{4}}$	$\cos\dfrac{\pi}{4}$
$\boxed{\mathbf{5}}$	$\sin\dfrac{2\pi}{3}$	$\boxed{\mathbf{6}}$	$\cos(-\dfrac{\pi}{6})$
$\boxed{\mathbf{7}}$	$\sin 0$	$\boxed{\mathbf{8}}$	$\cos 0$
$\boxed{\mathbf{9}}$	$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$	$\boxed{\mathbf{10}}$	$\operatorname{tg}(-\dfrac{\pi}{3})$
$\boxed{\mathbf{11}}$	$\sin(-\dfrac{\pi}{3})$	$\boxed{\mathbf{12}}$	$\cos\pi$

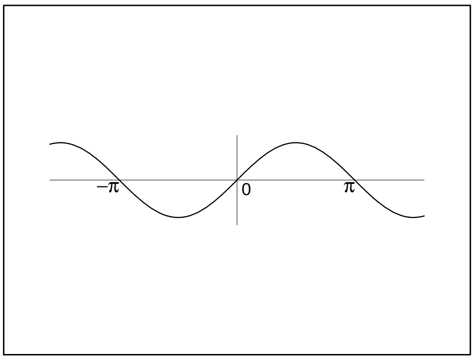
Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ 1; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\mathbf{7}}$ 0; $\boxed{\mathbf{8}}$ 1; $\boxed{\mathbf{9}}$ 1; $\boxed{\mathbf{10}}$ $-\sqrt{3}$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\mathbf{12}}$ -1.

Řešte rovnice a nerovnice:

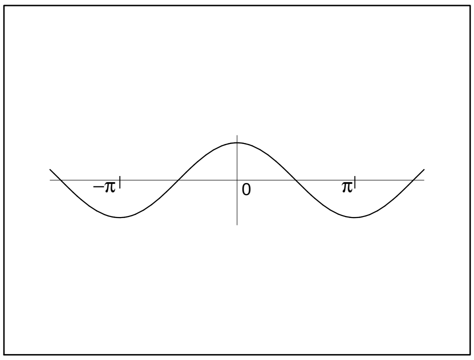
$\boxed{\mathbf{1}}$	$\sin x = -\dfrac{1}{2}$	$\boxed{\mathbf{2}}$	$\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\boxed{\mathbf{3}}$	$\operatorname{cotg} x = 1$	$\boxed{\mathbf{4}}$	$\operatorname{cotg} x = -1$
$\boxed{\mathbf{5}}$	$\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}} + \cos x = 0$	$\boxed{\mathbf{6}}$	$2\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1$
$\boxed{\mathbf{7}}$	$\cos x < 0$	$\boxed{\mathbf{8}}$	$\sin x > 0$
$\boxed{\mathbf{9}}$	$\cos x \geqq -\dfrac{1}{2}$	$\boxed{\mathbf{10}}$	$\operatorname{tg} x \geqq -\sqrt{3}$
$\boxed{\mathbf{11}}$	$\lvert\sin x\rvert \geqq \dfrac{1}{2}$	$\boxed{\mathbf{12}}$	$\lvert\cos x\rvert < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Výsledky: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{7\pi}{6} + 4k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 4k\pi$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\frac{\pi}{3} + k\pi$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$; $\boxed{\mathbf{9}}$ $x \in \langle\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{8\pi}{3} + 2k\pi\rangle$; $\boxed{\mathbf{10}}$ $x \in \langle-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $\boxed{\mathbf{11}}$ $x \in (\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi)$; $\boxed{\mathbf{12}}$ $x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$.

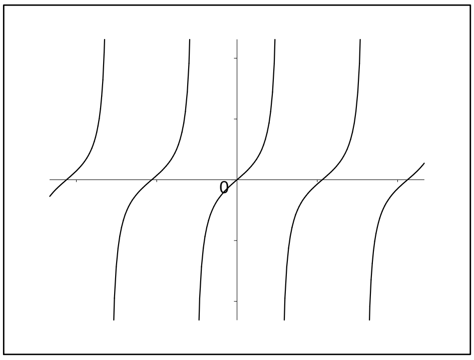
$\boxed{\sin x}$



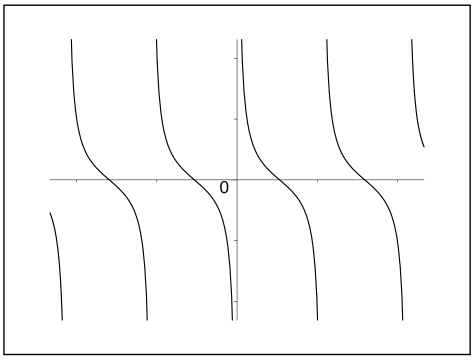
$\boxed{\cos x}$



$\boxed{\operatorname{tg} x}$



$\boxed{\operatorname{cotg} x}$



sin a cos jsou funkce 2π-periodické, tg a cotg jsou π-periodické;

$$D(\cos) = D(\sin) = \mathbb{R}$$

$$D(\operatorname{tg}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \qquad D(\operatorname{cotg}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, \pi + k\pi)$$

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x) = -\sin(-x) = \sin(2\pi + x)$$
$$\cos(x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(2\pi + x)$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\operatorname{cotg}(x)}$$
$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Definiční obory a průsečíky

Určete definiční obor funkce f a průsečíky grafu s osami x, y:

$\boxed{1}$	$f(x) := \ln(x+3)$	$\boxed{2}$	$f(x) := \sqrt[4]{x-1}$
$\boxed{3}$	$f(x) := \sqrt{2+3x}$	$\boxed{4}$	$f(x) := \sqrt{x^2+3x+2}$
$\boxed{5}$	$f(x) := \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-9x}}$	$\boxed{6}$	$f(x) := \sqrt{\ln x}$
$\boxed{7}$	$f(x) := \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$	$\boxed{8}$	$f(x) := \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
$\boxed{9}$	$f(x) := \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{-2}$	$\boxed{10}$	$f(x) := \sqrt[3]{3x-8}$
$\boxed{11}$	$f(x) := \dfrac{2-x}{x+1}$	$\boxed{12}$	$f(x) := \ln(e^x-1)$

Výsledky — def. obory: $\boxed{1}$ $x \in (-3,\infty)$; $\boxed{2}$ $x \in \langle 1,\infty)$; $\boxed{3}$ $x \in \langle -\frac{2}{3},\infty)$; $\boxed{4}$ $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle -1,\infty)$; $\boxed{5}$ $x \in (-\infty,0) \cup (9,\infty)$; $\boxed{6}$ $x \in \langle 1,\infty)$; $\boxed{7}$ $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$; $\boxed{8}$ $x \in (-1,1)$; $\boxed{9}$ $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup (1,\infty)$; $\boxed{10}$ $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{11}$ $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$; $\boxed{12}$ $x \in (0,\infty)$.

Výsledky — průsečíky s osou x: $\boxed{1}$ $[-2,0]$; $\boxed{2}$ $[1,0]$; $\boxed{3}$ $[-\frac{2}{3},0]$; $\boxed{4}$ $[-2,0]$ a $[-1,0]$; $\boxed{5}$ neexistuje; $\boxed{6}$ $[1,0]$; $\boxed{7}$ neexistuje; $\boxed{8}$ $[0,0]$; $\boxed{9}$ neexistuje; $\boxed{10}$ $[\frac{4}{3},0]$; $\boxed{11}$ $[2,0]$; $\boxed{12}$ $[\ln 2,0]$.

Výsledky — průsečíky s osou y: $\boxed{1}$ $[0,\ln 3]$; $\boxed{2}$ neexistuje; $\boxed{3}$ $[0,\sqrt{2}]$; $\boxed{4}$ $[0,\sqrt{2}]$; $\boxed{5}$ neexistuje; $\boxed{6}$ neexistuje; $\boxed{7}$ neexistuje; $\boxed{8}$ $[0,0]$; $\boxed{9}$ $[0,4]$; $\boxed{10}$ $[0,-2]$; $\boxed{11}$ $[0,2]$; $\boxed{12}$ neexistuje.

Vyjádření neznámé z rovnice

Z následujících rovnic vyjádřete proměnnou x. Určete, pro jaká y mají rovnice smysl.

$\boxed{1}$	$\ln x = y-3$	$\boxed{2}$	$y = \dfrac{3x-1}{x+2}$	$\boxed{3}$	$e^x = 2y-7$
$\boxed{4}$	$x^2 = y^2-4$	$\boxed{5}$	$\dfrac{1}{x^2} = y-2$	$\boxed{6}$	$\dfrac{1}{x^3} = y-2$
$\boxed{7}$	$\sqrt{x} = 5y+15$	$\boxed{8}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = y+1$	$\boxed{9}$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{y}$

Výsledky: $\boxed{1}$ $x = e^{y-3}$, $y \in \mathbb{R}$; $\boxed{2}$ $x = \frac{2y+1}{3-y}$, $y \in (-\infty,3) \cup (3,\infty)$; $\boxed{3}$ $x = \ln(2y-7)$, $y \in (\frac{7}{2},\infty)$; $\boxed{4}$ $x = \pm\sqrt{y^2-4}$, $y \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)$; $\boxed{5}$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{y-2}}$, $y \in (2,\infty)$; $\boxed{6}$ $x = \frac{1}{\sqrt[3]{y-2}}$, $y \in (-\infty,2) \cup (2,\infty)$; $\boxed{7}$ $x = (5y+15)^2$, $y \in \langle -3,\infty)$; $\boxed{8}$ $x = \frac{1}{(y+1)^2}$, $y \in (-1,\infty)$; $\boxed{9}$ $x = y^3$, $y \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

Podmínky:

$\frac{1}{\star}$ ... $\star \neq 0$

$\sqrt{\star}$ ... $\star \geqq 0$, podobně všechny sudé odmocniny, tj. $\sqrt[4]{\star}$, $\sqrt[6]{\star}$, ...

$\ln(\star)$ ... $\star > 0$, podobně všechny logaritmy, tj. $\log_a(\star)$

$\mathrm{tg}\,(\star)$ ... $\star \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{cotg}\,(\star)$ ... $\star \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Je-li $\diamond = \sqrt{\star}$, potom také musí platit $\diamond \geqq 0$.
Podobně, je-li $\diamond = e^{\star}$, musí $\diamond > 0$.

Průsečíky s osou x: všechny body $[x, 0]$, kde x je řešení rovnice $f(x) = 0$.
Průsečík s osou y: bod $[0, f(0)]$, pokud 0 leží v definičním oboru funkce f.

Tvorba grafu.

Necht' známe graf funkce $f(x)$. Necht' $c > 0$. Grafy dalších funkcí získáme následujícím postupem:

$f(x) + c$	posunutí grafu o c nahoru
$f(x) - c$	posunutí grafu o c dolů
$f(x + c)$	posunutí grafu o c doleva
$f(x - c)$	posunutí grafu o c doprava
$f(-x)$	překlopení grafu kolem osy y
$-f(x)$	překlopení grafu kolem osy x
$cf(x)$	protažení grafu c-krát ve směru osy y
$f(cx)$	smrštění grafu c-krát ve směru osy x
$\|f(x)\|$	překlopení grafu nad osu x
$f(\|x\|)$	graf napravo od osy y ponechat a navíc překlopit kolem osy y doleva

Rozbor (vyšetřování) funkce

U následujících funkcí určete definiční obor, průsečíky grafu s osami x, y, načrtněte graf, určete z grafu obor hodnot, zjistěte kde je funkce rostoucí a kde klesající, zda je omezená, najděte funkci inverzní:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$	$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+3}$
$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x+2}$	$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = 3 + \ln(1+x)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2}$	$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x) = (x+2)^3 - 1$
$\boxed{\mathbf{7}}$ $f(x) = 1 - e^{x+2}$	$\boxed{\mathbf{8}}$ $f(x) = (x+2)^2 - 1$

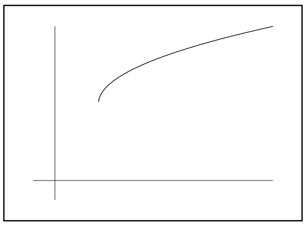
Výsledky — def. obory: $\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in \langle 1, \infty)$; $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in (-1, \infty)$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $x \in \mathbb{R}$.

Výsledky — průsečíky s osou x: $\boxed{\mathbf{1}}$ neexistují; $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-\frac{3}{2}, 0]$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-1, 0]$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $[e^{-3} - 1, 0]$; $\boxed{\mathbf{5}}$ $[-\frac{1}{2}, 0]$ a $[\frac{1}{2}, 0]$; $\boxed{\mathbf{6}}$ $[-1, 0]$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $[-2, 0]$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $[-1, 0]$ a $[-3, 0]$.

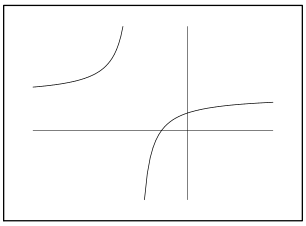
Výsledky — průsečík s osou y: $\boxed{\mathbf{1}}$ neexistuje; $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0, 1]$; $\boxed{\mathbf{3}}$ $[0, 1 - \sqrt[3]{2}]$; $\boxed{\mathbf{4}}$ $[0, 3]$; $\boxed{\mathbf{5}}$ neexistuje; $\boxed{\mathbf{6}}$ $[0, 7]$; $\boxed{\mathbf{7}}$ $[0, 1 - e^2]$; $\boxed{\mathbf{8}}$ $[0, 3]$.

Výsledky — graf:

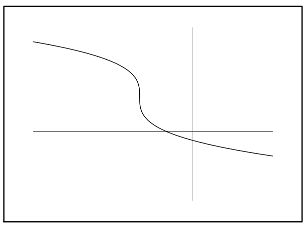
$\boxed{\mathbf{1}}$



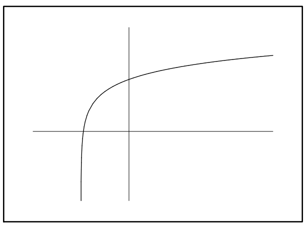
$\boxed{\mathbf{2}}$



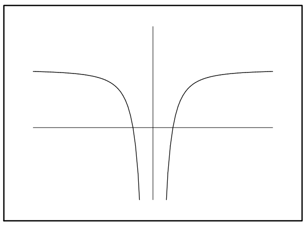
$\boxed{\mathbf{3}}$



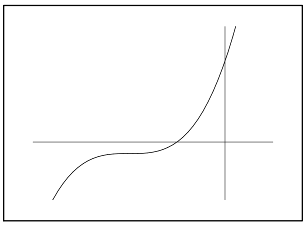
$\boxed{\mathbf{4}}$



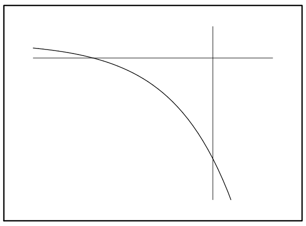
$\boxed{5}$



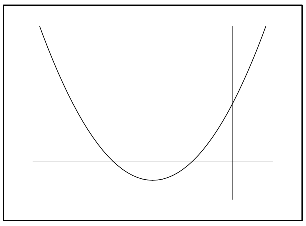
$\boxed{6}$



$\boxed{7}$



$\boxed{8}$



Výsledky — obory hodnot: $\boxed{1}$ $\langle 2, \infty)$; $\boxed{2}$ $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; $\boxed{3}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{4}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{5}$ $(-\infty, 4)$; $\boxed{6}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{7}$ $(-\infty, 1)$; $\boxed{8}$ $\langle -1, \infty)$.

Výsledky — monotonie a omezenost: $\boxed{1}$ rostoucí na $\langle 1, \infty)$, omezená zdola; $\boxed{2}$ rostoucí na $(-\infty, -3)$ a na $(-3, \infty)$; $\boxed{3}$ klesající na $\mathbb{R}$; $\boxed{4}$ rostoucí na $(-1, \infty)$; $\boxed{5}$ klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $(0, \infty)$, omezená shora; $\boxed{6}$ rostoucí na $\mathbb{R}$; $\boxed{7}$ klesající na $\mathbb{R}$, omezená shora; $\boxed{8}$ klesající na $(-\infty, -2\rangle$, rostoucí na $\langle -2, \infty)$, omezená zdola.

Výsledky — inverzní funkce: $\boxed{1}$ $x = y^2 - 4y + 5,\ y \in \langle 2, \infty)$; $\boxed{2}$ $x = \frac{3y-3}{2-y}$, $y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; $\boxed{3}$ $x = (1-y)^3 - 2,\ y \in \mathbb{R}$; $\boxed{4}$ $x = e^{y-3} - 1,\ y \in \mathbb{R}$; $\boxed{5}$ $x = -\frac{1}{\sqrt{4-y}}$ a $x = \frac{1}{\sqrt{4-y}},\ y \in (-\infty, 4)$; $\boxed{6}$ $x = -2 + \sqrt[3]{y+1},\ y \in \mathbb{R}$; $\boxed{7}$ $x = \ln(1-y) - 2,\ y \in (-\infty, 1)$; $\boxed{8}$ $x = -2 + \sqrt{y+1}$ a $x = -2 - \sqrt{y+1}$, $y \in \langle -1, \infty)$.

Příklady k zápočtu

U následujících funkcí určete definiční obor, průsečíky grafu s osami x, y, načrtněte graf, určete z grafu obor hodnot, zjistěte kde je funkce rostoucí a kde klesající, zda je omezená, najděte funkci inverzní:

$\boxed{\mathbf{A}}$ $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ $\boxed{\mathbf{B}}$ $f(x) = 2 + \dfrac{1}{(x+1)^3}$ $\boxed{\mathbf{C}}$ $f(x) = 1 - \ln(x-2)$