Aplikace určitého integrálu

A) obsah plochy mezi grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a osou x je roven

$$\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x;$$

B) obsah plochy mezi osou x a křivkou danou parametrickým předpisem

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t),\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle \end{aligned}$$

je roven

$$\int_\alpha^\beta |\psi(t) \cdot \phi'(t)|\, \mathrm{d}t;$$

C) obsah plochy omezené křivkou danou polárním předpisem

$$\rho = h(\varphi),\ \varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$$

je roven

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta h^2(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi;$$

D) objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky

$$y = f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$$

kolem osy x, je roven

$$\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x;$$

E) délka křivky dané předpisem

$$y = f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$$

je rovna

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x;$$

F) délka křivky dané parametrickým předpisem

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t),\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle \end{aligned}$$

je rovna

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t;$$

G) délka křivky dané polárním předpisem

$$\rho = h(\varphi),\ \varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$$

je rovna

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(h(\varphi))^2 + (h'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi;$$

Aplikace určitého integrálu — pokračování

H) obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky

$$y = f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$$

kolem osy x, je roven

$$2\pi \cdot \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x;$$

I) obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky dané parametrickým předpisem

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t),\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle \end{aligned}$$

kolem osy x, je roven

$$2\pi \cdot \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\ \mathrm{d}t;$$

J) obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky dané polárním předpisem

$$\rho = h(\varphi),\ \varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$$

kolem osy x, je roven

$$2\pi \cdot \int_\alpha^\beta |h(\varphi)\sin(\varphi)|\sqrt{(h(\varphi))^2 + (h'(\varphi))^2}\ \mathrm{d}\varphi;$$

Substituce

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} x \\ x &= \operatorname{arctg} y \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{y^2+1}\ \mathrm{d}y \\ \sin^2 x &= \frac{y^2}{y^2+1} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{y^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x &= 2 \operatorname{arctg} y \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{y^2+1}\ \mathrm{d}y \\ \sin x &= \frac{2y}{y^2+1} \\ \cos x &= \frac{1-y^2}{y^2+1} \end{aligned}$$