4. Cvičení

Spočtěte určité integrály pomocí substituce:

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_0^{8} e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ 3) $\displaystyle\int_0^{9} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ 5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x+1}\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin x+1}\,\mathrm{d}x$ 8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+1}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x$ 9) $\displaystyle\int_0^{1} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

Mezivýsledky — doporučené substituce: 1) $y=-\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$; 4) $y=\operatorname{tg} x$; 5) $y=\operatorname{tg} x$; 6) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 8) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 9) $y=\sqrt{x}$.

Mezivýsledky: 1) $[2ye^y-2e^y]_0^{-\infty}$; 2) $[3y^2e^y-6ye^y+6e^y]_0^2$; 3) $[y^2-2y+4\ln|y+2|]_0^3$; 4) $[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}]_0^{\infty}$; 6) $[-\frac{2}{y+1}]_0^{\infty}$; 8) $[y+\ln(y^2+1)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; 9) $[-2y\cos y+2\sin y]_0^1$.

Výsledky: 1) 2; 2) $6e^2-6$; 3) $3+4\ln\frac{5}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) neexistuje (primitivní funkce není definovaná v bodě $\frac{\pi}{2}$); 6) 2; 7) neexistuje (funkce není definovaná v bodě $-\frac{\pi}{2}$); 8) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{4}{3}$; 9) $2\sin 1-2\cos 1$ (což není rovno π !).

Z následujících rovnic vyjádřete proměnnou y. Určete, pro jaká x mají rovnice smysl.

1) $\ln y = x-3$	2) $\ln\lvert y\rvert = x+3$	3) $e^y = 2x-7$
4) $y^2 = x^2-4$	5) $\dfrac{1}{y^2} = x-2$	6) $\dfrac{1}{y^3} = x-2$
7) $\sqrt{y} = 5x+15$	8) $\dfrac{1}{\sqrt{y}} = x+1$	9) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1}{x}$
10) $\sqrt{y} = \sqrt{x}-1$	11) $e^{-y} = 5-x$	12) $-e^y = 5-x$
13) $e^{1-y} = x-3$	14) $3e^y = x+2$	15) $\dfrac{1}{2}\ln y = x-1$
16) $3\ln y = x+3$	17) $-\ln y = x^2+3$	18) $1-\ln y = x$
19) $x = \sqrt{\ln y+1}$	20) $x^3 = \sqrt{1-\ln y}$	21) $y^2 = \ln x+1$
22) $y^3 = \ln x+1$	23) $y^3 = \dfrac{1}{\ln x+1}$	24) $y^2 = 1-\ln x$
25) $e^y = e^{-x}+3$	26) $e^y = e^{-x}-1$	27) $x = \sqrt{e^y+1}$
28) $x = \sqrt{e^y-2}$	29) $\ln x = e^y+1$	30) $\ln(2y+3) = x^2$
31) $\ln y = \ln x+2$	32) $\ln\lvert y\rvert = 2\ln\lvert x\rvert-3$	33) $\ln\lvert y\rvert = -\ln\lvert x\rvert-3$

Výsledky: 1) $y=e^{x-3}$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $y=\pm e^{x+3}$, $x\in\mathbb{R}$; 3) $y=\ln(2x-7)$, $x\in(\frac{7}{2},\infty)$; 4) $y=\pm\sqrt{x^2-4}$, $x\in(-\infty,-2\rangle\cup\langle 2,\infty)$; 5) $y=\pm\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $x\in(2,\infty)$; 6) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$, $x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$; 7) $y=(5x+15)^2$, $x\in\langle -3,\infty)$; 8) $y=\frac{1}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,\infty)$; 9) $y=x^3$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; 10) $y=(\sqrt{x}-1)^2$, $x\in\langle 1,\infty)$;

11) $y = -\ln(5-x)$, $x \in (-\infty, 5)$; 12) $y = \ln(x-5)$, $x \in (5, \infty)$; 13) $y = 1 - \ln(x-3)$, $x \in (3, \infty)$; 14) $y = \ln(\frac{x+2}{3})$, $x \in (-2, \infty)$; 15) $y = e^{2x-2}$, $x \in \mathbb{R}$; 16) $y = e^{\frac{x}{3}+1}$, $x \in \mathbb{R}$; 17) $y = e^{-x^2-3}$, $x \in \mathbb{R}$; 18) $y = e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$; 19) $y = e^{x^2-1}$, $x \in \langle 0, \infty)$; 20) $y = e^{1-x^6}$, $x \in \langle 0, \infty)$; 21) $y = \pm\sqrt{\ln x + 1}$, $x \in \langle \frac{1}{e}, \infty)$; 22) $y = \sqrt[3]{\ln x + 1}$, $x \in (0, \infty)$; 23) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x+1}}$, $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$; 24) $y = \pm\sqrt{1 - \ln x}$, $x \in (0, e\rangle$; 25) $y = \ln(e^{-x}+3)$, $x \in \mathbb{R}$; 26) $y = \ln(e^{-x}-1)$, $x \in (-\infty, 0)$; 27) $y = \ln(x^2-1)$, $x \in (1, \infty)$; 28) $y = \ln(x^2+2)$, $x \in \langle 0, \infty)$; 29) $y = \ln(\ln x - 1)$, $x \in (e, \infty)$; 30) $y = \frac{e^{x^2}-3}{2}$, $x \in \mathbb{R}$; 31) $y = x \cdot e^2$, $x \in (0, \infty)$; 32) $y = \pm\frac{x^2}{e^3}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; 33) $y = \pm\frac{1}{e^3 \cdot x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

1) $y' = x^3 - \cos x$	2) $y' = \operatorname{cotg} x$	3) $y' = \cos^3 x$
4) $y' = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$	5) $y' = \sqrt{x} \cdot \ln x$	6) $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

Výsledky: 1) $\frac{x^4}{4} - \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 2) $\ln|\sin x| + c$, $x \neq k\pi$, $c \in \mathbb{R}$; 3) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 4) $\operatorname{arctg}(e^x) + c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$; 6) $2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + c$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice (metodou separace proměnných):

1) $y' = 3y$	2) $\dfrac{y'}{y} = -3$	3) $y' = 3x^2 \cdot y$
4) $y' \cdot y^2 = \sin x$	5) $x \cdot y' = y - 2$	6) $x \cdot y' = 2y$
7) $x \cdot y' = -y$	8) $x^2 \cdot y' = y^2$	9) $y - x \cdot y' = 1 + x^2 \cdot y'$

Výsledky: 1) $y = K \cdot e^{3x}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $y = K \cdot e^{-3x}$, $K \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$; 3) $y = K \cdot e^{x^3}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; 4) $y = \sqrt[3]{3c - 3\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; 5) $y = K \cdot x + 2$, $K \neq 0$, $x \neq 0$ (podmínku $x \neq 0$ lze odstranit), a $y \equiv 2$; 6) $y = K \cdot x^2$, $K \neq 0$, $x \neq 0$ (podmínku $x \neq 0$ lze odstranit), a $y \equiv 0$; 7) $y = \frac{K}{x}$, $K \neq 0$, $x \neq 0$, a $y \equiv 0$; 8) $y = \frac{x}{1 - c \cdot x}$, $c \neq 0$, $x \neq \frac{1}{c}$, a $y = x$, $x \in \mathbb{R}$; 9) $y = K \cdot \frac{x}{x+1} + 1$, $K \neq 0$, $x \neq -1$, a $y \equiv 1$.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice (metodou separace proměnných), které vyhovuje počáteční podmínce a) $y(\pi) = -1$, b) $y(0) = 0$:

1) $y' = y \cdot \cos x$	2) $y' = y \cdot \sin x$	3) $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$
4) $y' = y \cdot \operatorname{cotg} x$	5) $y' = \dfrac{\sin x}{y}$	6) $y' = \dfrac{\sin x}{y^2}$

Výsledky: 1a) $y = -e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $y \equiv 0$; 2a) $y = -e^{-1-\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $y \equiv 0$; 3a) $y = \frac{1}{\cos x}$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; b) $y = 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; 4a) neexistuje (v zadání nelze

dosadit $x = \pi$); b) neexistuje (v zadání nelze dosadit $x = 0$);
5a) $y = -\sqrt{-1 - 2\cos x}$, $x \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$; b) neexistuje (v zadání nelze dosadit $y = 0$);
6a) $y = \sqrt[3]{-4 - 3\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$; b) neexistuje (v zadání nelze dosadit $y = 0$).

Ověřte, že rovnice je homogenní, a najděte partikulární řešení, které vyhovuje počáteční podmínce $y(1) = 8$:

$$1)\quad y' = \frac{y}{x} - 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} \qquad\qquad 2)\quad y' = \frac{x+y}{x} + \frac{y}{x}$$

Výsledky: 1) $y = x \cdot (2 - \ln|x|)^3$, $x \in (0, \infty)$; 2) $y = 9x^2 - x$, $x \in (0, \infty)$.