

2. Cvičení

Spočtěte integrály (pomocí per partes a 1. substitute):

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\int x \cdot \cos(\pi x) dx$ | 2) $\int \cos x \cdot e^{-x} dx$ |
| 3) $\int \ln(3x + 2) dx$ | 4) $\int (x + 1)^2 \cdot e^{2x} dx$ |
| 5) $\int x \cdot \sin(1 - 2x) dx$ | 6) $\int (1 - x) \cdot e^{-x} dx$ |
| 7) $\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx$ | 8) $\int \operatorname{arctg} x dx$ |
| 9) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ | 10) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ |
| 11) $\int x^3 \cdot \sin(x^2) dx$ | 12) $\int x^3 \cdot e^{-x^2} dx$ |
| 13) $\int \arcsin x dx$ | 14) $\int x \cdot 3^{-x} dx$ |

Výsledky: 1) $\frac{x}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) + c, x \in \mathbb{R}$; 2) $\frac{1}{2}e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-x} \cos x + c, x \in \mathbb{R}$; 3) $x \ln(3x + 2) - x + \frac{2}{3} \ln(3x + 2) + c, x > -\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 + 2x + 1) + c, x \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{1}{2}x \cos(1 - 2x) + \frac{1}{4} \sin(1 - 2x) + c, x \in \mathbb{R}$; 6) $xe^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$; 7) $\frac{2}{13}e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{13}e^{2x} \sin(3x) + c, x \in \mathbb{R}$; 8) $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, x \in \mathbb{R}$; 9) $x \cdot \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 10) $\ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + c, x > 1$; 11) $-\frac{1}{2}x^2 \cos(x^2) + \frac{1}{2} \sin(x^2) + c, x \in \mathbb{R}$; 12) $-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c, x \in \mathbb{R}$; 13) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c, x \in (-1, 1)$; 14) $-\frac{x \cdot 3^{-x}}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln^2 3} + c, x \in \mathbb{R}$.

Spočtěte integrály (pomocí rozkladu na parciální zlomky):

- | | |
|--|--|
| 1) $\int \frac{5x + 7}{x^2 + 2x - 3} dx$ | 2) $\int \frac{5x - 3}{x^2 - 5x + 6} dx$ |
| 3) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 9} dx$ | 4) $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x - 3} dx$ |
| 5) $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$ | 6) $\int \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx$ |
| 7) $\int \frac{1}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} dx$ | 8) $\int \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} dx$ |
| 9) $\int \frac{x^5}{x^2 + x - 2} dx$ | 10) $\int \frac{8x}{x^2 - 3x + 2} dx$ |
| 11) $\int \frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2} dx$ | 12) $\int \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} dx$ |
| 13) $\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$ | 14) $\int \frac{x^3 - 1}{(x - 1)^2} dx$ |

Rozklad na zlomky: 1) $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-1}$; 2) $\frac{12}{x-3} + \frac{-7}{x-2}$; 3) $\frac{\frac{1}{6}}{x-3} + \frac{\frac{5}{6}}{x+3}$; 4) $\frac{\frac{5}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$; 5) $\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+3}$; 6) $-1 + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; 7) $\frac{-\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{\frac{1}{15}}{x+2} + \frac{\frac{1}{10}}{x-3}$; 8) $x - 3 + \frac{8}{x+2} + \frac{-1}{x+1}$; 9) $x^3 - x^2 + 3x - 5 + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{32}{3}}{x+2}$; 10) $\frac{16}{x-2} + \frac{-8}{x-1}$; 11) $\frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{3}{4}}{x} + \frac{-\frac{3}{4}}{x+2}$; 12) $x + 3 + \frac{7}{x-1}$; 13) $x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$; 14) $x + 2 + \frac{3}{x-1}$.

Výsledky: 1) $2 \ln|x+3| + 3 \ln|x-1| + c$, $x \neq -3$, $x \neq 1$; 2) $12 \ln|x-3| - 7 \ln|x-2| + c$, $x \neq 2$, $x \neq 3$; 3) $\frac{1}{6} \ln|x-3| + \frac{5}{6} \ln|x+3| + c$, $x \neq \pm 3$; 4) $\frac{5}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + c$, $x \neq -1$, $x \neq 3$; 5) $\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + c$, $x \neq -3$, $x \neq 1$; 6) $-x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + c$, $x \neq \pm 1$; 7) $\frac{1}{15} \ln|x+2| - \frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{1}{10} \ln|x-3| + c$, $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq 3$; 8) $\frac{x^2}{2} - 3x + 8 \ln|x+2| - \ln|x+1| + c$, $x \neq -2$, $x \neq -1$; 9) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{32}{2} \ln|x+2| + c$, $x \neq -2$, $x \neq 1$; 10) $16 \ln|x-2| - 8 \ln|x-1| + c$, $x \neq 1$, $x \neq 2$; 11) $-\frac{1}{2x} - \frac{3}{4} \ln|x+2| + \frac{3}{4} \ln|x| + c$, $x \neq -2$, $x \neq 0$; 12) $\frac{x^2}{2} + 3x + 7 \ln|x-1| + c$, $x \neq 1$, $x \neq 2$; 13) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1|$, $x \neq \pm 1$; 14) $\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x-1|$, $x \neq 1$.

Spočítejte integrály (pomocí rozkladu na parciální zlomky a 1. substituce):

$$\begin{array}{ll}
 1) \int \frac{x^2 + 2x + 9}{x(x^2 + 9)} dx & 2) \int \frac{1}{(x-1)^2 \cdot (x-2)} dx \\
 3) \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx & 4) \int \frac{1}{4 - 9x^2} dx \\
 5) \int \frac{9}{x(x^2 + 9)} dx & 6) \int \frac{x - 18}{x(x^2 + 9)} dx \\
 7) \int \frac{x}{(2x+1)(2-x)} dx & 8) \int \frac{x^5}{1-x^2} dx \\
 9) \int \frac{1}{6x^2 - x - 1} dx & 10) \int \frac{x^5}{(1-x)^2} dx \\
 11) \int \frac{3x-3}{x^3+1} dx & 12) \int \frac{(x+2)^2}{x^3-1} dx \\
 13) \int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)} dx & 14) \int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x-1)} dx
 \end{array}$$

Rozklad na zlomky: 1) $\frac{1}{x} + \frac{0 \cdot x + 2}{x^2 + 9}$; 2) $\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1}$; 3) $\frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+1}$; 4) $\frac{\frac{1}{4}}{2+3x} + \frac{\frac{1}{4}}{2-3x}$; 5) $\frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+9}$; 6) $\frac{2x+1}{x^2+9} + \frac{-2}{x}$; 7) $\frac{-\frac{1}{5}}{2x+1} + \frac{\frac{2}{5}}{2-x}$; 8) $-x^3 - x + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+x}$; 9) $\frac{\frac{2}{5}}{2x-1} + \frac{-\frac{3}{5}}{3x+1}$; 10) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + \frac{5x-4}{(1-x)^2}$; 11) $\frac{-2}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$; 12) $\frac{3}{x-1} + \frac{-2x-1}{x^2+x+1}$.

Výsledky: 1) $\ln|x| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$, $x \neq 0$; 2) $\ln|x-2| + \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + c$, $x \neq 1$, $x \neq 2$; 3) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$, $x \neq 0$; 4) $\frac{1}{12} \ln|2 + 3x| - \frac{1}{12} \ln|2 - 3x| + c$, (zde je to mínus správně!), $x \neq \pm \frac{2}{3}$; 5) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) + c$, $x \neq 0$; 6) $\ln(x^2 + 9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) - 2 \ln|x| + c$, $x \neq 0$; 7) $-\frac{1}{10} \ln|2x+1| - \frac{2}{5} \ln|2-x| + c$, $x \neq -\frac{1}{2}$, $x \neq 2$; 8) $-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|1-x| - \frac{1}{2} \ln|1+x| + c$, $x \neq \pm 1$; 9) $\frac{1}{5} \ln|2x-1| - \frac{1}{5} \ln|3x+1| + c$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{3}$; 10) $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + 5 \ln|1-x| + \frac{1}{1-x} + c$, $x \neq 1$; 11) $-2 \ln|x+1| + \ln(x^2 - x + 1) + c$, $x \neq -1$; 12) $3 \ln|x-1| - \ln(x^2 + x + 1) + c$, $x \neq 1$; 13) $\ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 2) + c$, $x \in \mathbb{R}$; 14) $\ln|\sqrt{x}-1| - \ln(\sqrt{x}+1) + c$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Spočtěte integrály (pomocí 2. substituce):

- | | |
|---|--|
| 1) $\int \frac{1}{2 + \sqrt{x}} dx$ | 2) $\int \frac{\sqrt{x} + 2}{3 + \sqrt{x}} dx$ |
| 3) $\int \frac{1}{(2 + x) \cdot \sqrt{1 + x}} dx$ | 4) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ |
| 5) $\int \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} dx$ | 6) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{3 + \sqrt[3]{x}} dx$ |
| 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} - 1)} dx$ | 8) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$ |
| 9) $\int \frac{1}{e^x - 2} dx$ | 10) $\int \frac{1}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx$ |
| 11) $\int \frac{1}{\sqrt{4 + e^x}} dx$ | 12) $\int \frac{1}{\sin x + 1} dx$ |
| 13) $\int \frac{1}{1 - \cos x} dx$ | 14) $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$ |
| 15) $\int \frac{1}{1 - \sin x + \cos x} dx$ | 16) $\int \frac{1}{2 \sin x \cos x + 1} dx$ |
| 17) $\int \frac{\cotg^2 x + 1}{\tg x + 1} dx$ | 18) $\int \frac{\tg x}{\sin^2 x + \tg^2 x} dx$ |

Výsledky: 1) $2\sqrt{x} - 4 \ln(\sqrt{x} + 2) + c, x > 0$; 2) $x - 2\sqrt{x} + 6 \ln(\sqrt{x} + 3) + c, x > 0$; 3) $2 \operatorname{arctg}(\sqrt{1+x}) + c, x > -1$; 4) $\ln|\sqrt{x+1}-1| - \ln(\sqrt{x+1}+1) + c, x > -1, x \neq 0$; 5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 12 \ln|\sqrt[3]{x}+2| + c, x \neq -8$; 6) $x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 9\sqrt[3]{x} - 27 \ln|\sqrt[3]{x}+3| + c, x \neq -27$; 7) $4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|\sqrt[4]{x}-1| + c, x > 0, x \neq 1$; 8) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x}+1) + c, x > 0$; 9) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln|e^x - 2| + c, x \neq \ln 2$; 10) $\frac{1}{2}x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2} \ln(e^x + 2) + c, x \in \mathbb{R}$; 11) $\frac{1}{2} \ln(\sqrt{4+e^x} - 2) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{4+e^x} + 2) + c, x \in \mathbb{R}$; 12) $-\frac{2}{\tg \frac{x}{2} + 1} + c, x \neq \pi + 2k\pi, x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; 13) $-\frac{1}{\tg \frac{x}{2}} + c, x \neq k\pi$; 14) $\tg \frac{x}{2} + c, x \neq \pi + 2k\pi$; 15) $-\ln|1 - \tg \frac{x}{2}| + c, x \neq \pi + 2k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; 16) $-\frac{1}{\tg x + 1} + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$; 17) $-\ln|\tg x| - \cotg x + \ln|\tg x + 1| + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, x \neq k\pi$; 18) $\frac{1}{2} \ln|\tg x| - \frac{1}{4} \ln(\tg^2 x + 2) + c, x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$.