

1. Cvičení

Spočtěte integrály (bez použití per partes a substituce):

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\int x^5 dx$ | 2) $\int 4x^3 dx$ | 3) $\int \frac{1}{x^3} dx$ |
| 4) $\int \frac{1}{x^4} dx$ | 5) $\int \frac{1}{x} dx$ | 6) $\int \sqrt{x} dx$ |
| 7) $\int \sqrt[5]{x} dx$ | 8) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 9) $\int x \cdot \sqrt[3]{x} dx$ |
| 10) $\int x^2 \cdot \sqrt{x} dx$ | 11) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ | 12) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$ |
| 13) $\int 3x(x^2 - 1) dx$ | 14) $\int 2x(3 - x) dx$ | 15) $\int \frac{x^3 - 4x^2}{x^2} dx$ |
| 16) $\int \frac{1 + x^2}{x^3} dx$ | 17) $\int (x^2 - 3x)^2 dx$ | 18) $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4} dx$ |
| 19) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ | 20) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$ | 21) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$ |
| 22) $\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx$ | 23) $\int \frac{4 - 2 \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$ | |
| 24) $\int (\sin x - \pi) dx$ | 25) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ | |
| 26) $\int \frac{1}{1 + x^2} dx$ | 27) $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$ | |
| 28) $\int \frac{2x^2 - 3}{1 + x^2} dx$ | 29) $\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)} dx$ | |
| 30) $\int \frac{\sqrt{x} + x^3 e^x - x^2}{x^3} dx$ | 31) $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx$ | |
| 32) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^2 + 1} dx$ | 33) $\int \frac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{2x}} dx$ | |

Výsledky: 1) $\frac{x^6}{6} + c, x \in \mathbb{R}$; 2) $x^4 + c, x \in \mathbb{R}$; 3) $-\frac{1}{2x^2} + c, x \neq 0$; 4) $-\frac{1}{3x^3} + c, x \neq 0$; 5) $\ln|x| + c, x \neq 0$; 6) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c, x > 0$; 7) $\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + c, x \in \mathbb{R}$; 8) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c, x \neq 0$; 9) $\frac{3}{7}x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + c, x \in \mathbb{R}$; 10) $\frac{2}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + c, x > 0$; 11) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c, x > 0$; 12) $-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2}} + c, x \neq 0$; 13) $\frac{3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + c, x \in \mathbb{R}$; 14) $3x^2 - \frac{2x^3}{3} + c, x \in \mathbb{R}$; 15) $\frac{x^2}{2} - 4x + c, x \neq 0$; 16) $-\frac{1}{2x^2} + \ln|x| + c, x \neq 0$; 17) $\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 + c, x \in \mathbb{R}$; 18) $\frac{x^2}{2} - x + c, x \neq -4$; 19) $-\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x + c, x \neq 0$; 20) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c, x > 0$; 21) $-\operatorname{cotg} x + c, x \neq k\pi$; 22) $-3 \cos x - 2 \sin x + c, x \in \mathbb{R}$; 23) $4 \operatorname{tg} x - 2x + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; 24) $-\cos x - \pi x + c, x \in \mathbb{R}$; 25) $\operatorname{tg} x - x + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; 26) $\operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$; 27) $x - \operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$; 28) $2x - 5 \operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$; 29) $\ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x + c, x \neq 0$; 30) $-\frac{2}{3\sqrt{x^3}} + e^x - \ln|x| + c, x > 0$; 31) $\frac{x^3}{3} - x + 2 \operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$; 32) $\frac{x^2}{2} - 3x + 3 \operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$; 33) $e^x - x + c, x \in \mathbb{R}$.

Spočítejte integrály pomocí metody per partes:

- | | |
|---|---|
| 1) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$ | 2) $\int \frac{1}{x^3} \ln x \, dx$ |
| 3) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$ | 4) $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x \, dx$ |
| 5) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \, dx$ | 6) $\int (2x + 3) \cdot \ln x \, dx$ |
| 7) $\int x \cdot \sin x \, dx$ | 8) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$ |
| 9) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ | 10) $\int (2x - 3) \cdot e^x \, dx$ |
| 11) $\int (x^2 + x) \cdot e^x \, dx$ | 12) $\int (3 - 2x) \cdot \sin x \, dx$ |
| 13) $\int (x^2 + 5) \cdot \cos x \, dx$ | 14) $\int e^x \cdot \cos x \, dx$ |
| 15) $\int \cos^2 x \, dx$ | 16) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ |
| 17) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$ | 18) $\int x \cdot \ln^2 x \, dx$ |
| 19) $\int \ln x \, dx$ | 20) $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$ |
| 21) $\int \ln^2 x \, dx$ | 22) $\int x \cdot 2^x \, dx$ |
| 23) $\int e^x \cdot \sin(3 - x) \, dx$ | 24) $\int e^x \cdot \cos(3x + 1) \, dx$ |

Výsledky: 1) $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c, x > 0$; 2) $-\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + c, x > 0$; 3) $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c, x > 0$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \ln x - \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4} + c, x > 0$; 5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} \ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + c, x > 0$; 6) $(x^2 + 3x) \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} - 3x + c, x > 0$; 7) $-x \cos x + \sin x + c, x \in \mathbb{R}$; 8) $x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x + c, x \in \mathbb{R}$; 9) $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, x \in \mathbb{R}$; 10) $(2x - 5) \cdot e^x + c, x \in \mathbb{R}$; 11) $(x^2 - x + 1) \cdot e^x + c, x \in \mathbb{R}$; 12) $(2x - 3) \cdot \cos x - 2 \sin x + c, x \in \mathbb{R}$; 13) $(x^2 + 7) \cdot \sin x + 2x \cos x + c, x \in \mathbb{R}$; 14) $\frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x + c, x \in \mathbb{R}$; 15) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + c, x \in \mathbb{R}$; 16) $\frac{1}{2} \sin^2 x + c, x \in \mathbb{R}$; 17) $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$; 18) $\frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + c, x > 0$; 19) $x \ln x - x + c, x > 0$; 20) $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$; 21) $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c, x > 0$; 22) $\frac{1}{\ln 2} \cdot x \cdot 2^x - \frac{1}{\ln^2 2} \cdot 2^x + c, x \in \mathbb{R}$; 23) $\frac{1}{2}e^x \sin(3 - x) + \frac{1}{2}e^x \cos(3 - x) + c, x \in \mathbb{R}$; 24) $\frac{1}{10}e^x \cos(3x + 1) + \frac{3}{10}e^x \sin(3x + 1) + c, x \in \mathbb{R}$.

Spočítejte integrály pomocí substituce:

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--|
| 1) $\int \cos(x + 2) \, dx$ | 2) $\int \sin(3x + 4) \, dx$ | 3) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$ |
| 4) $\int \sin(\pi - x) \, dx$ | 5) $\int e^{3x} \, dx$ | 6) $\int e^{-x} \, dx$ |
| 7) $\int e^{x+5} \, dx$ | 8) $\int e^{2-x} \, dx$ | 9) $\int e^{2x-1} \, dx$ |
| 10) $\int (x + 1)^2 \, dx$ | 11) $\int (x + 1)^{10} \, dx$ | 12) $\int (1 - x)^{10} \, dx$ |

13) $\int (2x+5)^5 dx$	14) $\int (3-5x)^3 dx$	15) $\int \sqrt{2x-1} dx$
16) $\int \sqrt[3]{3-2x} dx$	17) $\int \frac{1}{(x+7)^2} dx$	18) $\int \frac{1}{(3x+2)^3} dx$
19) $\int \frac{1}{\sqrt{5x+1}} dx$	20) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}} dx$	21) $\int \frac{1}{x+1} dx$
22) $\int \frac{1}{2x-1} dx$	23) $\int \frac{1}{1-2x} dx$	24) $\int \frac{1}{4-x} dx$
25) $\int \frac{3}{1-x} dx$	26) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	27) $\int x \cdot \sqrt{3+x^2} dx$
28) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$	29) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$	30) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$
31) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$	32) $\int (e^x+8)^2 \cdot e^x dx$	33) $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}} dx$
34) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$	35) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$	36) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$
37) $\int \frac{1}{1+9x^2} dx$	38) $\int \frac{1}{1+16x^2} dx$	39) $\int \frac{1}{16+x^2} dx$
40) $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$	41) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$	42) $\int \operatorname{cotg} x dx$
43) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$	44) $\int \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx$	45) $\int \frac{1}{x \cdot (1+\ln^2 x)} dx$

Substituce (doporučené): 1) $y = x + 2$; 2) $y = 3x + 4$; 3) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = \pi - x$; 5) $y = 3x$; 6) $y = -x$; 7) $y = x + 5$; 8) $y = 2 - x$; 9) $y = 2x - 1$; 10) $y = x + 1$; 11) $y = x + 1$; 12) $y = 1 - x$; 13) $y = 2x + 5$; 14) $y = 3 - 5x$; 15) $y = 2x - 1$; 16) $y = 3 - 2x$; 17) $y = x + 7$; 18) $y = 3x + 2$; 19) $y = 5x + 1$; 20) $y = 3 - x$; 21) $y = x + 1$; 22) $y = 2x - 1$; 23) $y = 1 - 2x$; 24) $y = 4 - x$; 25) $y = 1 - x$; 26) $y = 1 + x^2$; 27) $y = 3 + x^2$; 28) $y = 1 + x^2$; 29) $y = x^3 + 1$; 30) $y = 1 - x^4$; 31) $y = \sin x$; 32) $y = e^x + 8$; 33) $y = 2 + e^{2x}$; 34) $y = \sin x$; 35) $y = \sin x$; 36) $y = \operatorname{arctg} x$; 37) $y = 3x$; 38) $y = 4x$; 39) $y = \frac{x}{4}$; 40) $y = \frac{2x}{3}$; 41) $y = \operatorname{tg} x$; 42) $y = \sin x$; 43) $y = \ln x$; 44) $y = \ln x$; 45) $y = \ln x$.

Výsledky: 1) $\sin(x+2)+c, x \in \mathbb{R}$; 2) $-\frac{1}{3} \cos(3x+4)+c, x \in \mathbb{R}$; 3) $2 \sin(\frac{x}{2})+c, x \in \mathbb{R}$; 4) $\cos(\pi-x)+c, x \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{1}{3}e^{3x}+c, x \in \mathbb{R}$; 6) $-e^{-x}+c, x \in \mathbb{R}$; 7) $e^{x+5}+c, x \in \mathbb{R}$; 8) $-e^{2-x}+c, x \in \mathbb{R}$; 9) $\frac{1}{2}e^{2x-1}+c, x \in \mathbb{R}$; 10) $\frac{(x+1)^3}{3}+c, x \in \mathbb{R}$; 11) $\frac{(x+1)^{11}}{11}+c, x \in \mathbb{R}$; 12) $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+c, x \in \mathbb{R}$; 13) $\frac{(2x+5)^6}{12}+c, x \in \mathbb{R}$; 14) $-\frac{(3-5x)^4}{20}+c, x \in \mathbb{R}$; 15) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+c, x > \frac{1}{2}$; 16) $-\frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(3-2x)^4}+c, x \in \mathbb{R}$; 17) $-\frac{1}{x+7}+c, x \neq -7$; 18) $-\frac{1}{6(3x+2)^2}+c, x \neq -\frac{2}{3}$; 19) $\frac{2}{5}\sqrt{5x+1}+c, x > -\frac{1}{5}$; 20) $-\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(3-x)^2}+c, x \neq 3$; 21) $\ln|x+1|+c, x \neq -1$; 22) $\frac{1}{2} \ln|2x-1|+c, x \neq \frac{1}{2}$; 23) $-\frac{1}{2} \ln|1-2x|+c, x \neq \frac{1}{2}$; 24) $-\ln|4-x|+c, x \neq 4$; 25) $-3 \ln|1-x|+c, x \neq 1$; 26) $\sqrt{1+x^2}+c, x \in \mathbb{R}$; 27) $\frac{1}{3}(3+x^2)\sqrt{3+x^2}+c, x \in \mathbb{R}$; 28) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)+c, x \in \mathbb{R}$; 29) $\frac{1}{3} \ln|x^3+1|+c, x \neq -1$; 30) $-\frac{\sqrt{1-x^4}}{2}+c, x \in (-1, 1)$; 31) $e^{\sin x}+c, x \in \mathbb{R}$; 32) $\frac{(e^x+8)^3}{3}+c, x \in \mathbb{R}$; 33) $\frac{1}{2} \ln(2+e^{2x})+c, x \in \mathbb{R}$; 34) $3\sqrt[3]{\sin x}+c, x \neq k\pi$; 35) $\frac{1}{4} \sin^4 x+c, x \in \mathbb{R}$; 36) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}^3 x+c, x \in \mathbb{R}$; 37) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3x)+c, x \in \mathbb{R}$; 38) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}(4x)+c, x \in \mathbb{R}$; 39) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}(\frac{x}{4})+c, x \in \mathbb{R}$; 40) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg}(\frac{2x}{3})+c, x \in \mathbb{R}$; 41) $e^{\operatorname{tg} x}+c, x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$; 42) $\ln|\sin x|+c, x \neq k\pi$; 43) $\frac{1}{3} \ln^3 x+c, x > 0$; 44) $-\frac{1}{\ln x}+c, x > 0, x \neq 1$; 45) $\operatorname{arctg}(\ln x)+c, x > 0$.