8. Cvičení

Vypočítejte délku křivky dané předpisem:

1) $y = 2x+3,\ x \in \langle 1,2\rangle$ 2) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3},\ x \in \langle 0,3\rangle$

3) $y = \frac{1}{2}\ln x - \frac{x^2}{4},\ x \in \langle 1,e\rangle$ 4) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x},\ x \in \langle 1,3\rangle$

5) $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2},\ x \in \langle 1,2\rangle$ 6) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \in \langle -1,1\rangle$

7) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2},\ x \in \langle 0,1\rangle$ 8) $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2},\ x \in \langle -1,1\rangle$

9) $y = \frac{1}{2}(\ln(\sin x) + \ln(\cos x)),\ x \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\rangle$

Mezivýsledky — integrály: 1) $\int_1^2 \sqrt{5}\ \mathrm{d}x$; 2) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x$; 3) $\int_1^e (\frac{1}{2x} + \frac{x}{2})\ \mathrm{d}x$; 4) $\int_1^3 (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2})\ \mathrm{d}x$; 5) $\int_1^2 (\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3})\ \mathrm{d}x$; 6) $\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\ \mathrm{d}x$; 7) $\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\ \mathrm{d}x$; 8) $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x$; 9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x)\ \mathrm{d}x$.

Výsledky: 1) $\sqrt{5}$; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}$; 4) $\frac{14}{3}$; 5) $\frac{33}{16}$; 6) $e - \frac{1}{e}$; 7) $4 - 2\sqrt{2}$; 8) 4; 9) $\ln\sqrt{3}$.

Určete délku křivky dané polárním předpisem:

1) $\rho = e^{\varphi},\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ 2) $\rho = a\cdot\sin(\varphi),\ \varphi \in \langle 0,\pi\rangle$

3) $\rho = \cos(\varphi),\ \varphi \in \langle -\pi,\pi\rangle$ 4) $\rho = \cos(\varphi) + \sin(\varphi),\ \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle$

5) $\rho = \cos(\varphi) - \sin(\varphi),\ \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle$ 6) $\rho = \varphi^2,\ \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle$

Mezivýsledky — integrály: 1) $\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cdot e^{\varphi}\ \mathrm{d}\varphi$; 2) $\int_0^{\pi} a\ \mathrm{d}\varphi$; 3) $\int_{-\pi}^{\pi} 1\ \mathrm{d}\varphi$; 4) $\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ \mathrm{d}\varphi$; 5) $\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ \mathrm{d}\varphi$; 6) $\int_0^{2\pi} \varphi\sqrt{\varphi^2+4}\ \mathrm{d}\varphi$.

Výsledky: 1) $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$; 2) $a\pi$; 3) 2π; 4) $2\sqrt{2}\pi$; 5) $2\sqrt{2}\pi$; 6) $\frac{8}{3}\sqrt{(\pi^2+1)^3} - \frac{8}{3}$.

Určete délku křivky dané parametrickým předpisem

1) $x = \sin t + 1$
$y = \cos t - 2,\ t \in \langle 0,2\pi\rangle$

2) $x = 3t^2$
$y = 2t^3,\ t \in \langle 0,\sqrt{3}\rangle$

3) $x = 3t^2$
$y = 2t^3,\ t \in \langle -\sqrt{3},\sqrt{3}\rangle$

4) $x = a\cdot(\cos t + t\sin t)$
$y = a\cdot(\sin t - t\cos t),\ t \in \langle 0,2\pi\rangle$

5) $x = a\cdot\cos^3 t$
$y = a\cdot\sin^3 t,\ t \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$

6) $x = a\cdot\cos^3 t$
$y = a\cdot\sin^3 t,\ t \in \langle 0,2\pi\rangle$

Mezivýsledky — integrály: 1) $\int_0^{2\pi} 1 \; \mathrm{d}t$; 2) $\int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{1+t^2} \; \mathrm{d}t$;
3) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 6|t| \cdot \sqrt{1+t^2} \; \mathrm{d}t = 2\int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{1+t^2} \; \mathrm{d}t$; 4) $\int_0^{2\pi} at \; \mathrm{d}t$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cdot \cos t \sin t \; \mathrm{d}t$;
6) $\int_0^{2\pi} 3a \cdot |\cos t \sin t| \; \mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cdot \cos t \sin t \; \mathrm{d}t$.

Výsledky: 1) 2π; 2) 14; 3) 28; 4) $2a\pi^2$; 5) $\frac{3a}{2}$; 6) $6a$.

Určete povrch rotační plochy vzniklé tak, že kolem osy x rotuje křivka daná předpisem:

1) $y = \sqrt{4x},\ x \in \langle 0, 3\rangle$

2) $y = \sqrt{4 - x^2},\ x \in \langle 0, 2\rangle$

3) $y = 2\sqrt{x+1},\ x \in \langle 0, 1\rangle$

4) $y = 2x + 1,\ x \in \langle 0, 2\rangle$

5) $y = 2x - 2,\ x \in \langle 0, 2\rangle$

6) $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \in \langle -1, 1\rangle$

Mezivýsledky — integrály: 1) $2\pi\int_0^3 2\sqrt{x+1} \; \mathrm{d}x$; 2) $2\pi\int_0^2 2 \; \mathrm{d}x$; 3) $2\pi\int_0^1 2\sqrt{x+2} \; \mathrm{d}x$;
4) $2\pi\int_0^2 \sqrt{5}(2x+1) \; \mathrm{d}x$; 5) $2\pi\int_0^2 \sqrt{5} \cdot |2x-2| \; \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 \sqrt{5}(2-2x) \; \mathrm{d}x +$
$+ 2\pi\int_1^2 \sqrt{5}(2x-2) \; \mathrm{d}x$; 6) $2\pi\int_{-1}^1 \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 \; \mathrm{d}x$.

Výsledky: 1) $\frac{56\pi}{3}$; 2) 8π; 3) $\frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$; 4) $12\sqrt{5}\pi$; 5) $4\sqrt{5}\pi$; 6) $\frac{\pi}{2}(e^2 + 4 - \frac{1}{e^2})$.

Určete povrch rotační plochy vzniklé tak, že kolem osy x rotuje křivka daná polárním předpisem:

$$\rho = a \cdot \sin(\varphi),\ \varphi \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Mezivýsledek: $2\pi\int_0^\pi a^2 \sin^2(\varphi) \; \mathrm{d}\varphi$.

Výsledek: $\pi^2 a^2$.

Určete povrch rotační plochy vzniklé tak, že kolem osy x rotuje křivka daná parametrickým předpisem:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos^3 t \\ y &= a \cdot \sin^3 t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle. \end{aligned}$$

Mezivýsledek: $2\pi\int_0^\pi a^2 \sin^3 t \cdot |3\cos t \sin t| \; \mathrm{d}t = 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^4 t \cos t \; \mathrm{d}t$.

Výsledek: $\frac{12}{5}a^2\pi$.