

5. Cvičení

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice. Použijte integrační faktor.

1) $y' + 5y = e^{2x}$

2) $y' + \frac{y}{x} = 3x$

3) $y' + y = e^{-x} \cdot \sin x$

4) $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x$

5) $y' + \frac{3}{x} \cdot y = \frac{2}{x^3}$

6) $y' + x \cdot y = 2x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

7) $y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$

8) $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 3 \sin^2 x$

Mezivýsledky — integrační faktor: 1) e^{5x} ; 2) x ; 3) e^x ; 4) $\frac{1}{x}$; 5) x^3 ; 6) $e^{\frac{x^2}{2}}$; 7) $e^{-\frac{1}{x}}$; 8) $\cos x$.

Výsledky: 1) $c \cdot e^{-5x} + \frac{1}{7} e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 2) $x^2 + \frac{c}{x}$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 3) $e^{-x} \cdot (c - \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 4) $x^2 + c \cdot x$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{2}{x^2} + \frac{c}{x^3}$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 6) $e^{\frac{x^2}{2}} + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 7) $(x + c) \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 8) $\frac{c + \sin^3 x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $c \in \mathbb{R}$.

K rovnicím z minulého odstavce najděte partikulární řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$. Pokud takové řešení neexistuje, najděte partikulární řešení vyhovující podmínce $y(1) = 0$.

Výsledky: 1) $\frac{6}{7} \cdot e^{-5x} + \frac{1}{7} e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) neexistuje; $x^2 - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; 3) $e^{-x} \cdot (2 - \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$; 4) neexistuje; $x^2 - x$, $x \neq 0$; 5) neexistuje; $\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$; 6) $e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$; 7) neexistuje; $(x - 1) \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$; 8) $\frac{1 + \sin^3 x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$

2) $y'' - 3y' + 2y = 0$

3) $y'' - 2y' + y = 0$

4) $y'' - 4y' + 5y = 0$

5) $y'' + 9y = 0$

6) $y'' - 9y = 0$

7) $y'' - 9y' = 0$

8) $y'' - 9 = 0$

Mezivýsledky — kořeny charakteristické rovnice: 1) $-2, -1$; 2) $1, 2$; 3) 1 (dvojnás.); 4) $2 \pm i$; 5) $\pm 3i$; 6) ± 3 ; 7) $0, 9$; 8) řeší se jinak.

Výsledky: 1) $A \cdot e^{-2x} + B \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$; 2) $A \cdot e^{2x} + B \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$; 3) $A \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$; 4) $A \cdot e^{2x} \cdot \cos x + B \cdot e^{2x} \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$; 5) $A \cdot \cos(3x) + B \cdot \sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$; 6) $A \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$; 7) $A + B \cdot e^{9x}$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$; 8) $\frac{9}{2}x^2 + A \cdot x + B$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$.