7. Cvičení

Vypočítejte obsah plochy omezené křivkami:

1) $y = x + 6,\ y = x^2$
2) $y = x^2,\ y = 2x + 3$
3) $y = 1 - x^2,\ y = 4x + 4$
4) $y = x^4,\ y = x$
5) $y = x^2 - 2x,\ y = 4 - x^2$
6) $y = \dfrac{x^2}{4},\ y = \dfrac{x}{2} + 2$
7) $y = x^2,\ y = \dfrac{x^3}{3}$
8) $y = \dfrac{3}{x},\ y = 4 - x$
9) $y = \dfrac{2}{x},\ y = 3 + \dfrac{2}{x-3}$
10) $y = \sqrt[3]{x},\ y = x^2$
11) $y = x^3,\ y = \sqrt{x}$
12) $y = x^3,\ y = 4x$
13) $y = x^4,\ y = x^2$
14) $y = \sqrt[3]{x},\ y = x$
15) $y = \sqrt{2x},$ osa $x,\ x = 3$
16) $y = -x^2,$ osa $x,\ x = 2$
17) $y = (x-3)^2,$ osa $x,\ x = 2$
18) $y = 3x^2,\ y = \dfrac{3}{x},\ x = e$

19) $y = 12 - x - x^2,$ kladná část osy $x,$ osa y

Mezivýsledky: 1) $\int_{-2}^{3}(x+6-x^2)\,\mathrm{d}x$; 2) $\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,\mathrm{d}x$; 3) $\int_{-3}^{-1}(1-x^2-4x-4)\,\mathrm{d}x$; 4) $\int_0^1(x-x^4)\,\mathrm{d}x$; 5) $\int_{-1}^{2}(4-x^2-x^2+2x)\,\mathrm{d}x$; 6) $\int_{-2}^{4}(\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4})\,\mathrm{d}x$; 7) $\int_0^3(x^2-\frac{x^3}{3})\,\mathrm{d}x$; 8) $\int_1^3(4-x-\frac{3}{x})\,\mathrm{d}x$; 9) $\int_1^2(3+\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x})\,\mathrm{d}x$; 10) $\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x^2)\,\mathrm{d}x$; 11) $\int_0^1(\sqrt{x}-x^3)\,\mathrm{d}x$; 12) $\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2(4x-x^3)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^2(4x-x^3)\,\mathrm{d}x$; 13) $\int_{-1}^{0}(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x + \int_0^1(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^1(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x$; 14) $\int_{-1}^{0}(x-\sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x + \int_0^1(\sqrt[3]{x}-x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x)\,\mathrm{d}x$; 15) $\int_0^3\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x$; 16) $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$; 17) $\int_2^3(x-3)^2\,\mathrm{d}x$; 18) $\int_1^e(3x^2-\frac{3}{x})\,\mathrm{d}x$; 19) $\int_0^3(12-x-x^2)\,\mathrm{d}x$.

Výsledky: 1) $\frac{125}{6}$; 2) $\frac{32}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{10}$; 5) 9; 6) 9; 7) $\frac{9}{4}$; 8) $4-3\ln 3$; 9) $3-4\ln 2$; 10) $\frac{5}{12}$; 11) $\frac{5}{12}$; 12) 8; 13) $\frac{4}{15}$; 14) $\frac{1}{2}$; 15) $2\sqrt{6}$; 16) $\frac{8}{3}$; 17) $\frac{1}{3}$; 18) e^3-4; 19) $\frac{45}{2}$.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

1) $y = 3x - 2,\ x \in \langle 1, 2\rangle$
2) $y = 3x - 2,\ x \in \langle 0, 1\rangle$
3) $y = 2 - x,\ x \in \langle 0, 3\rangle$
4) $y = e^x,\ x \in \langle 0, \dfrac{1}{2}\rangle$
5) $y = \sqrt{x},\ x \in \langle 0, 4\rangle$
6) $y = \sqrt[3]{x},\ x \in \langle -1, 1\rangle$
7) $y = \dfrac{1}{\sin x},\ x \in \langle \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\rangle$
8) $y = \dfrac{1}{\cos x},\ x \in \langle \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\rangle$

Výsledky: 1) 7π; 2) π; 3) 3π; 4) $\frac{\pi}{2}(e-1)$; 5) 8π; 6) $\frac{6\pi}{5}$; 7) π; 8) $\pi\cdot(\sqrt{3}-1)$.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy omezené danými křivkami kolem osy x:

1) $y = x^4,\ y = \sqrt{x}$

2) $y = x,\ y = x^2$

3) $y = \dfrac{2}{x},\ y = 3 - x$

4) $y = \sqrt[3]{x},\ y = x$

5) $y = x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$

6) $y = x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$

7) $y = x + 2,\ y = x^2$

8) $y = \sqrt{2x},$ osa $x,\ x = 2$

Mezivýsledky — meze integrálů: 1) 0, 1; 2) 0, 1; 3) 1, 2; 4) -1, 1; 5) 0, 1; 6) -1, 1; 7) -1, 2; 8) 0, 2.

Výsledky: 1) $\frac{7\pi}{18}$; 2) $\frac{2\pi}{15}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{8\pi}{15}$; 5) $\frac{2\pi}{5}$; 6) $\frac{32\pi}{35}$; 7) $\frac{72\pi}{5}$; 8) 4π.

Vypočítejte objem elipsoidu, který vznikne rotací křivky $y = \sqrt{36 - 9x^2}$, $x \in \langle -2, 2\rangle$, kolem osy x.

Výsledek: 96π.

Vypočítejte objem rotačního paraboloidu, který vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 4\rangle$, kolem osy x.

Výsledek: 8π.