

## 6. Cvičení

Vypočítejte obsah plochy "pod grafem", tj. mezi grafem dané funkce a osou  $x$ :

- |  |   |
|--|---|
| 1) $y = 2 - x, x \in \langle 0, 3 \rangle$                           | 2) $y = 2x + 1, x \in \langle -2, 2 \rangle$                          |
| 3) $y = x^2 - x, x \in \langle 0, 2 \rangle$                         | 4) $y = x^2 - x, x \in \langle -2, 2 \rangle$                         |
| 5) $y = x^2, x \in \langle -2, 2 \rangle$                            | 6) $y = x^3, x \in \langle -2, 2 \rangle$                             |
| 7) $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 4 \rangle$                        | 8) $y = \sqrt{x} - 1, x \in \langle 0, 4 \rangle$                     |
| 9) $y = \cos x, x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$ | 10) $y = \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$ |
| 11) $y = e^{-x}, x \in \langle 0, \infty \rangle$                    | 12) $y = e^x, x \in \langle 0, \infty \rangle$                        |
| 13) $y = \operatorname{arctg} x, x \in \langle -1, 1 \rangle$        | 14) $y = \operatorname{arccotg} x, x \in \langle -1, 1 \rangle$       |

Mezivýsledky — dělicí body: 1) 2; 2)  $-\frac{1}{2}$ ; 3) 1; 4) 0 a 1; 5) 0; 6) 0; 7) nejsou; 8) 1; 9) nejsou; 10) 0; 11) nejsou; 12) nejsou; 13) 0; 14) nejsou.

Výsledky: 1)  $\frac{5}{2}$ ; 2)  $\frac{17}{2}$ ; 3) 1; 4)  $\frac{17}{3}$ ; 5)  $\frac{16}{3}$ ; 6) 8; 7)  $\frac{16}{3}$ ; 8) 2; 9)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 10)  $\frac{3}{2}$ ; 11) 1; 12)  $\infty$ ; 13)  $\frac{\pi}{2} - \ln 2$ ; 14)  $\pi$ .

A) Určete obsah pravé části lemniskáty, tj. oblasti omezené křivkou s polárním předpisem

$$\rho = \sqrt{\cos(2\varphi)}, \varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle.$$

B) Určete obsah jednolisté růžice zadané polárním předpisem

$$\rho = \sin(\varphi), \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

C) Určete obsah čtyřlísté růžice zadané polárním předpisem

$$\rho = \sin(2\varphi), \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

D) Určete obsah kardioidy zadané polárním předpisem

$$\rho = \cos(\varphi) + 1, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

E) Určete obsah plochy pod jedním obloukem cykloidy, tj. pod křivkou zadanou parametrickým předpisem

$$\begin{aligned}x &= t - \sin t \\y &= 1 - \cos t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

F) Určete obsah plochy pod jedním obloukem zkrácené cykloidy, tj. pod křivkou zadanou parametrickým předpisem

$$\begin{aligned}x &= 2t - \sin t \\y &= 2 - \cos t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

G) Určete obsah elipsy zadané parametrickým předpisem

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos t \\y &= 2 \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

Mezivýsledky: A)  $\frac{1}{2}[\frac{1}{2} \sin(2\varphi)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ ; B)  $\frac{1}{2}[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi]_0^{\pi}$ ; C)  $\frac{1}{4}[\frac{u}{2} - \frac{1}{2} \cos u \sin u]_0^{4\pi}$ ,  
 $u = 2\varphi$ ; D)  $\frac{1}{2}[\frac{3\varphi}{2} + 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi]_0^{2\pi}$ ; E)  $[\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{1}{2} \cos t \sin t]_0^{2\pi}$ ;  
F)  $[\frac{9t}{2} - 4 \sin t + \frac{1}{2} \cos t \sin t]_0^{2\pi}$ ; G)  $4[3t - 3 \cos t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}$ .

Výsledky: A)  $\frac{1}{2}$ ; B)  $\frac{\pi}{4}$ ; C)  $\frac{\pi}{2}$ ; D)  $\frac{3\pi}{2}$ ; E)  $3\pi$ ; F)  $9\pi$ ; G)  $6\pi$ .