

3. Cvičení

Spočítejte určité integrály:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\int_0^1 x^3 dx$ | 2) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$ | 3) $\int_{-1}^1 (x^2 - x) dx$ |
| 4) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ | 5) $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx$ | 6) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ |
| 7) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 8) $\int_2^3 \frac{1}{x^3} dx$ | 9) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$ |
| 10) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx$ | 11) $\int_0^5 e^x dx$ | 12) $\int_{-2}^2 e^{-x} dx$ |
| 13) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ | 14) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ | 15) $\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x} dx$ |
| 16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ | 17) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ | 18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ |
| 19) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$ | 20) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx$ | 21) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x) dx$ |
| 22) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$ | 23) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx$ | 24) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(4x) dx$ |
| 25) $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx$ | 26) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$ | 27) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ |
| 28) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$ | 29) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$ | 30) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cotg} x dx$ |
| 31) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ | 32) $\int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2} dx$ | 33) $\int_0^1 2^x dx$ |
| 34) $\int_{-1}^3 2^x dx$ | 35) $\int_{-1}^1 3^{-x} dx$ | 36) $\int_1^3 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$ |
| 37) $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx$ | 38) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+x-6} dx$ | 39) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x-2} dx$ |
| 40) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 41) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ | 42) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ |

Mezivýsledky: 1) $[\frac{x^4}{4}]_0^1$; 2) $[\frac{x^3}{3} + x]_{-1}^1$; 3) $[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^1$; 4) $[\frac{2}{3}x\sqrt{x}]_0^4$; 5) $[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}]_{-1}^8$; 6) $[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}]_0^8$; 7) $[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}]_{-1}^0$; 8) $[-\frac{1}{2x^2}]_2^3$; 9) $[-\frac{1}{2x^2}]_0^1$; 10) $[-\frac{1}{2x^2}]_{-1}^0$; 11) $[e^x]_0^5$; 12) $[-e^{-x}]_{-2}^2$; 13) $[\ln|x|]_1^e$; 14) $[\ln|x|]_0^1$; 15) $[\ln|x|]_{-4}^{-3}$; 16) $[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$; 17) $[\sin x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$; 18) $[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$; 19) $[-\cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$; 20) $[\frac{1}{2}\sin(2x)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$; 21) $[\frac{1}{3}\sin(3x)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$; 22) $[-2\cos(\frac{x}{2})]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$; 23) $[-\cos(x + \frac{\pi}{3})]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$; 24) $[\frac{1}{4}\sin(4x)]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$; 25) $[-\frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{6})]_0^{\frac{5\pi}{6}}$; 26) $[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{6}}$; 27) $[\operatorname{tg} x]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 28) $[-\operatorname{cotg} x]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 29) $[-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 30) $[\ln|\sin x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 31) $[\operatorname{arctg} x]_0^1$; 32) $[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(\frac{x}{3})]_{-3}^{\sqrt{3}}$; 33) $[\frac{2^x}{\ln 2}]_0^1$; 34) $[\frac{2^x}{\ln 2}]_{-1}^3$; 35) $[-\frac{3^{-x}}{\ln 3}]_{-1}^1$; 36) $[-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1|]_{-1}^3$; 37) $[\frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1|]_0^2$; 38) $[\frac{2}{5}\ln|x+3| + \frac{3}{5}\ln|x-2|]_{-1}^1$; 39) $[\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\ln|x-2|]_{-1}^1$; 40) $[\arcsin x]_{-1}^1$; 41) $[\frac{1}{2}\arcsin(2x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$; 42) $[\arcsin(\frac{x}{2})]_{-1}^1$.

Výsledky: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{16}{3}$; 5) $\frac{45}{4}$; 6) 6; 7) $-\frac{3}{2}$; 8) $\frac{5}{72}$; 9) $+\infty$; 10) $-\infty$;
 11) $e^5 - 1$; 12) $e^2 - \frac{1}{e^2}$; 13) 1; 14) $+\infty$; 15) $\ln \frac{3}{4}$; 16) 1; 17) $\sqrt{2}$; 18) 1; 19) 0; 20) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 21) $\frac{1}{3}$; 22) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 23) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 24) 0; 25) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 26) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$; 27) 1; 28) $+\infty$; 29) $\ln \sqrt{2}$;
 30) $+\infty$; 31) $\frac{\pi}{4}$; 32) $\frac{5\pi}{36}$; 33) $\frac{1}{\ln 2}$; 34) $\frac{15}{2 \ln 2}$; 35) $\frac{8}{3 \ln 3}$; 36) $\frac{2}{3} + \ln \frac{2}{3}$; 37) $-\frac{1}{2} \ln 3$;
 38) $\frac{1}{5} \ln \frac{4}{27}$; 39) $\frac{26}{3} - 8 \ln 3$; 40) π ; 41) $\frac{\pi}{8}$; 42) $\frac{\pi}{3}$.

Spočítejte určité integrály:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\int_0^{\infty} x^3 dx$ | 2) $\int_{-\infty}^0 x^3 dx$ | 3) $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx$ |
| 4) $\int_0^{\infty} (x^2 + 1) dx$ | 5) $\int_{-\infty}^0 (x^2 + 1) dx$ | 6) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1) dx$ |
| 7) $\int_0^{\infty} (x^2 - x) dx$ | 8) $\int_{-\infty}^0 (x^2 - x) dx$ | 9) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - x) dx$ |
| 10) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} dx$ | 11) $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} dx$ | 12) $\int_{-\infty}^0 \sqrt[3]{x} dx$ |
| 13) $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[3]{x} dx$ | 14) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 15) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ |
| 16) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 17) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ | 18) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$ |
| 19) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ | 20) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^3} dx$ | 21) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ |
| 22) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$ | 23) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ | 24) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4} dx$ |
| 25) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ | 26) $\int_0^{\infty} e^x dx$ | 27) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ |
| 28) $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$ | 29) $\int_0^{\infty} 2^{-x} dx$ | 30) $\int_{-\infty}^0 2^{-x} dx$ |
| 31) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ | 32) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx$ | 33) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} dx$ |
| 34) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ | 35) $\int_0^{\infty} \cos x dx$ | 36) $\int_{-\infty}^0 \cos x dx$ |
| 37) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ | 38) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ | 39) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ |
| 40) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ | 41) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | 42) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ |
| 43) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | 44) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | 45) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ |
| 46) $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{x - 2} dx$ | 47) $\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{x - 2} dx$ | 48) $\int_0^{\infty} \arcsin x dx$ |
| 49) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x + 1)} dx$ | 50) $\int_0^1 \frac{1}{x^2(x + 1)} dx$ | 51) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2(x + 1)} dx$ |

Mezivýsledky — neurčité integrály (bez konstanty c): 1) $\frac{x^4}{4}$; 4) $\frac{x^3}{3} + x$; 7) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$; 10) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; 12) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$; 14) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 17) $-\frac{1}{2x^2}$; 21) $-\frac{1}{3x^3}$; 26) e^x ; 29) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2}$; 31) $\ln|x|$; 35) $\sin x$; 37) $-\cos x$; 38) $\operatorname{arctg} x$; 41) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$; 46) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\ln|x-2|$; 49) $-\frac{1}{x} + \ln|x+1| - \ln|x|$.

Výsledky: 1) ∞ ; 2) $-\infty$; 3) neexistuje (diverguje); 4) ∞ ; 5) ∞ ; 6) ∞ ; 7) ∞ ; 8) ∞ ; 9) ∞ ; 10) ∞ ; 11) neexistuje (fce není definována na celém intervalu); 12) $-\infty$; 13) neexistuje (diverguje); 14) ∞ ; 15) $-\infty$; 16) neexistuje (fce není definována na celém intervalu); 17) $\frac{1}{2}$; 18) $-\frac{1}{2}$; 19) ∞ ; 20) $-\infty$; 21) $\frac{1}{24}$; 22) $\frac{1}{3}$; 23) ∞ ; 24) ∞ ; 25) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 26) ∞ ; 27) 1; 28) ∞ ; 29) $\frac{1}{\ln 2}$; 30) ∞ ; 31) ∞ ; 32) ∞ ; 33) $-\infty$; 34) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 35) neexistuje (diverguje); 36) neexistuje (diverguje); 37) neexistuje (diverguje); 38) $\frac{\pi}{2}$; 39) $\frac{3\pi}{4}$; 40) π ; 41) $\frac{1}{2}\ln 3$; 42) ∞ ; 43) $-\infty$; 44) $\frac{1}{2}\ln 2$; 45) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 46) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 47) ∞ ; 48) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 49) $1 - \ln 2$; 50) ∞ ; 51) ∞ .

Spočítejte určité integrály (pomocí per partes):

$$\begin{array}{lll} 1) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx & 2) \int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx & 3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx \\ 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx & 5) \int_{-\infty}^0 e^x \sin x dx & 6) \int_0^1 x \cdot \operatorname{arccotg} x dx \\ 7) \int_0^1 x \cdot 2^x dx & 8) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx & 9) \int_0^1 \cos(\ln x) dx \end{array}$$

Mezivýsledky — neurčité integrály (bez konstanty c): 1) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x}$; 2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x}$; 3) $x \sin x + \cos x$; 4) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$; 5) $\frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x$; 6) $\frac{x^2}{2} \operatorname{arccotg} x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x$; 7) $\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}$; 8) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x \sin x$; 9) $\frac{x}{2} \cos(\ln x) + \frac{x}{2} \sin(\ln x)$.

Výsledky: 1) 1; 2) $-\frac{4}{9}$; 3) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$; 4) $\pi - 2$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2\ln 2 - 1}{(\ln 2)^2}$; 8) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$; 9) $\frac{1}{2}$.

Spočítejte určité integrály (pomocí 1. substituce):

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx & 2) \int_{-4}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx & 3) \int_{-4}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx \\ 4) \int_{-4}^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx & 5) \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx & 6) \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \\ 7) \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx & 8) \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx & 9) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
10) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx & 11) \int_1^\infty \frac{1}{x \ln x} dx & 12) \int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx \\
13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x (4 + \operatorname{tg}^2 x)} dx & 14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx & 15) \int_0^\pi \sin^3 x dx \\
16) \int_0^\pi \cos^3 x dx & 17) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx & 18) \int_1^\infty \frac{x}{x^4 + 1} dx \\
19) \int_3^\infty \frac{x}{x^4 - 4} dx & 20) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx & 21) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx \\
22) \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^x + 3)} dx & 23) \int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x^2} dx & 24) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx
\end{array}$$

Doporučené substituce: 1) $y = x^2$; 5) $y = -x^2$; 6) $y = \frac{1}{x}$; 8) $y = \ln x$; 11) $y = \ln x$; 13) $y = \operatorname{tg} x$; 14) $y = \cos x$; 15) $y = \cos x$; 16) $y = \sin x$; 18) $y = x^2$; 19) $y = x^2$; 20) $y = 1 - x^2$; 21) $y = x^2$; 22) $y = e^x$; 23) $y = -x^2$; 24) $y = e^x$.

Mezivýsledky: 1) $[\sqrt{y+9}]_0^{16}$; 2) $[\sqrt{y+9}]_{16}^1$; 3) $[\sqrt{y+9}]_{16}^1$; 4) $[\sqrt{y+9}]_{16}^{16}$; 5) $[-\frac{1}{2}e^y]_0^{-\infty}$; 6) $[-e^y]_1^0$; 7) $[-e^y]_\infty^1$; 8) $[\frac{y^2}{2}]_{-\infty}^0$; 9) $[\frac{y^2}{2}]_0^\infty$; 10) $[\frac{y^2}{2}]_0^1$; 11) $[\ln y]_0^\infty$; 12) $[\ln y]_1^3$; 13) $[\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\frac{y}{2})]_0^\infty$; 14) $[-\operatorname{arctg} y]_1^0$; 15) $[-y + \frac{y^3}{3}]_1^{-1}$; 16) $[y - \frac{y^3}{3}]_0^0$; 17) $[y - \frac{y^3}{3}]_0^1$; 18) $[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} y]_1^\infty$; 19) $[\frac{1}{8} \ln |y - 2| - \frac{1}{8} \ln |y + 2|]_9^\infty$; 20) $[-\sqrt{y}]_1^0$; 21) $[\frac{1}{2} \arcsin y]_0^1$; 22) $[\frac{1}{5} \ln |y - 2| - \frac{1}{5} \ln |y + 3|]_0^1$; 23) $[\frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y]_0^{-\infty}$; 24) $[\operatorname{arctg} y]_0^\infty$.

Výsledky: 1) 2; 2) $\sqrt{10} - 5$; 3) $\sqrt{10} - 5$; 4) 0; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $e - 1$; 7) ∞ ; 8) $-\infty$; 9) ∞ ; 10) $\frac{1}{2}$; 11) ∞ ; 12) $\ln 3$; 13) $\frac{\pi}{4}$; 14) $\frac{\pi}{4}$; 15) $\frac{4}{3}$; 16) 0; 17) $\frac{2}{3}$; 18) $\frac{\pi}{8}$; 19) $\frac{1}{8} \ln \frac{11}{7}$; 20) 1; 21) $\frac{\pi}{4}$; 22) $\frac{1}{5} \ln \frac{3}{8}$; 23) $\frac{1}{2}$; 24) $\frac{\pi}{2}$.