POKRÝVAČŮV PROBLÉM

Popis aktivity

Výpočet povrchu jehlanu.

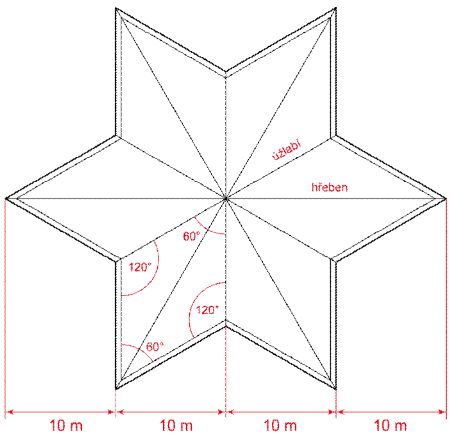
Předpokládané znalosti

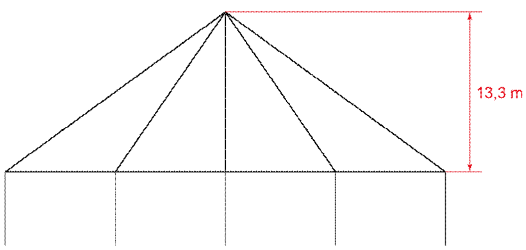
Povrch tělesa, trojúhelník, goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku, Pythagorova věta

Potřebné pomůcky

Zadání

Na obrázku jsou přibližně nakresleny rozměry letohrádku Hvězda na Bílé hoře. Určete s 10% rezervou, kolik m^2 střešní krytiny je třeba pořídit na její výměnu.

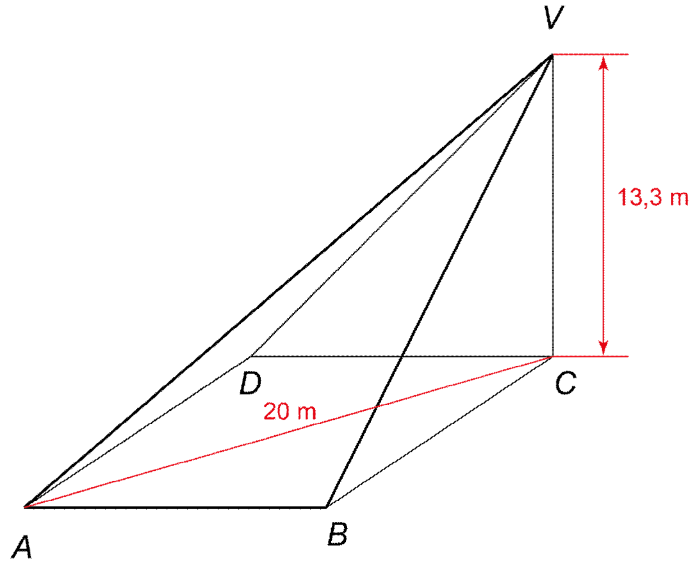




Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Střecha je složena ze šesti shodných jehlanů, celkem tedy její povrch tvoří 12 shodných trojúhelníků. Vypočítáme obsah jednoho z nich. Jde o jehlany *ABCDV* na obrázku, budeme počítat obsah trojúhelníku *ABV*.



Určíme délky stran trojúhelníku *ABV*, potom použijeme kosinovou větu, popř. Heronův vzorec. Podle zadání počítáme s 10% přesností, proto budeme průběžně zaokrouhlovat.

ABCD je kosočtverec s delší úhlopříčkou délky 20 m a s vnitřním úhlem *DAB* velikosti 60°. Polovina délky úhlopříčky *AC* je tedy výškou v rovnostranném trojúhelníku *ABD*. Proto platí:

$$\frac{|AB|\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{20}{2},$$

odtud

$$|AB|=\frac{20}{\sqrt{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}\doteq 11{,}5$$

Trojúhelník *ACV* je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *C*, použijeme Pythagorovu větu:

$$|AV|^2=|AC|^2+|CV|^2,$$

tedy:

$$|AV|^2=20^2+13{,}3^2\doteq 400+177\doteq 577$$

$$|AV|=\sqrt{577}\doteq 24$$

Trojúhelník *BCV* je také pravúhlý s pravým úhlem při vrcholu *C*. Dále platí, že |*AB*| = |*BC*|, proto:

$$|BV|^2=|BC|^2+|CV|^2$$

$$\left|BV\right|^2 = 11{,}5^2 + 13{,}3^2 \doteq 132 + 177 = 309$$

$$\left|BV\right| = \sqrt{309} \doteq 17{,}6$$

V trojúhelníku *ABV* známe délky všech jeho stran. Obsah vypočítáme pomocí vzorce $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$, velikost úhlu určíme užitím kosinové věty.

Vypočtěme velikost úhlu *VAB*:

$$\left|VB\right|^2 = \left|VA\right|^2 + \left|AB\right|^2 - 2 \cdot \left|VA\right| \cdot \left|AB\right| \cdot \cos\alpha$$

Ačkoli jsme přibližně odmocnili, dosazujme druhé mocniny, které známe přesně:

$$309 = 577 + \frac{400}{3} - 2 \cdot 24 \cdot 11{,}5 \cdot \cos\alpha \quad \Big| \cdot 3$$

$$927 = 1\,731 + 400 - 6 \cdot 24 \cdot 11{,}5 \cdot \cos\alpha$$

$$927 = 2\,131 - 1\,656 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2\,131 - 927}{1\,656} \doteq 0{,}73$$

Velikost úhlu α nemusíme určovat, ale platí, že $\alpha \doteq 43°$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + 0{,}73^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha \doteq 0{,}47$$

$$\sin\alpha \doteq 0{,}69$$

Vypočtěme obsah trojúhelníku pomocí uvedeného vzorce:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|VA\right| \cdot \left|AB\right| \cdot \sin\alpha$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 11{,}5 \cdot 0{,}69$$

$$S = 95{,}22$$

Obsah celé střechy se tedy rovná $12 \cdot 95{,}22 = 1142{,}64 \doteq 1143$, $S = 1143\ \mathrm{m}^2$.

Počítáme-li s 10% rezervou, vyjde hodnota 1257 m^2.

Doporučujeme rozměry letohrádku Hvězda vytisknout jako pracovní list, popř. promítnout dataprojektorem.

Jehlan *ABCDV* je vhodné nakreslit na tabuli nebo promítnout dataprojektorem.

Předložený úkol je čistě početní, jde ovšem o bezprostřední sepětí stereometrické problematiky s praktickým problémem. Při plánování pokrytí takové střechy je potřeba podobné výpočty provést.

Je možno navázat i výpočty obsahů jiných střech, u venkovských usedlostí může jít o ještě složitější výpočty.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Doplňkové aktivity	
Na aktivitu navazuje aktivita Klempířův problém, která řeší výpočet délky potřebného plechování střechy letohrádku. Konstrukce sítě tělesa (jehlanu s podstavou šesticípé hvězdy), konstrukce sítí dalších těles – střech s valbami, vikýři či složitějšími spoji.	
Obrazový materiál	foto: [online]; http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Praha,_Liboc,_Obora_Hvězda,_letohrádek_Hvězda.JPG; 9. 6. 2012 Ostatní obrázky jsou dílem autora.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.