

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SPOR O ODMOCNINU

Popis aktivity		
Nalezení chyby v důkazu sporem.		
Předpokládané znalosti		
Důkaz sporem, vlastnosti racionálních čísel		
Potřebné pomůcky		
Pracovní list		
Zadání		
Každý zná důkaz, že odmocnina ze 2 není racionální číslo. Lze analogicky dokázat též tvrzení, že odmocnina ze 4 není racionální číslo? Porovnejte oba důkazy a zkoumejte, zda jsou správné. Tvrzení dokazujeme sporem.		
1. Tvrzení	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$
2. Negace tvrzení	$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{4} \in \mathbb{Q}$
3. Ekvivalentní tvrzení	Existují dvě nesoudělná přirozená čísla a, b , pro která platí $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$	Existují dvě nesoudělná přirozená čísla a, b , pro která platí $\sqrt{4} = \frac{a}{b}$
4. Umocníme rovnost a zbavíme se zlomků	$2b^2 = a^2$	$4b^2 = a^2$
5. Z toho plyne	a^2 je sudé, tedy a je sudé	a^2 je dělitelné 4, tedy a je dělitelné 4
6. Ekvivalentní tvrzení	Existuje přirozené číslo q takové, že $a = 2q$	Existuje přirozené číslo r takové, že $a = 4r$
7. Nový tvar rovnosti (4)	$2b^2 = 4q^2$	$4b^2 = 16r^2$
8. Ekvivalentní tvrzení	$b^2 = 2q^2$	$b^2 = 4r^2$
9. Z toho plyne	b^2 je sudé, tedy b je sudé	b^2 je dělitelné 4, tedy b je dělitelné 4
10. Z toho plyne	a i b jsou sudá, tedy nejsou nesoudělná, což je spor s předpokladem	a i b jsou dělitelná 4, tedy nejsou nesoudělná, což je spor s předpokladem
Jak je vidět, dokázali jsme, že odmocnina ze 4 není racionální číslo. Víme ale, že odmocnina ze 4 jsou 2, což je racionální číslo!?		
Možný postup řešení, metodické poznámky		

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Je třeba předem probrat princip důkazu sporem a důkaz iracionality odmocniny ze dvou.

Chyba je v řádku 5: Je-li a^2 dělitelné 4, pak a nemusí být dělitelné 4, ale jen 2.
Další opakování téže chyby je v řádku 9.

Doplňkové aktivity

Je možné zkoumat tentýž důkaz pro odmocniny ze 3, ze 6 atd.