evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TROJÚHELNÍK POD HYPERBOLOU

Popis aktivity

Výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníku.

Předpokládané znalosti

Obsah trojúhelníku, graf lineární lomené funkce, hodnota funkce v bodě, tečna grafu funkce

Potřebné pomůcky

Kalkulátor

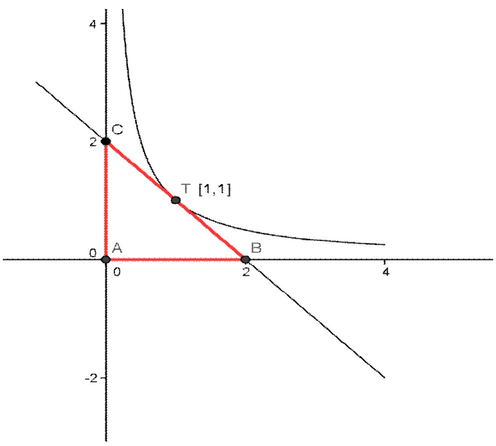
Zadání

Je dána lineární lomená funkce $f: y = \frac{1}{x}$ a bod $T[1,1]$. Tečna vedená bodem T omezuje spolu s osami x a y trojúhelník.

1) Vypočtěte obsah tohoto trojúhelníku.
2) Proveďte stejný výpočet pro bod $T\left[\frac{1}{2},2\right]$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

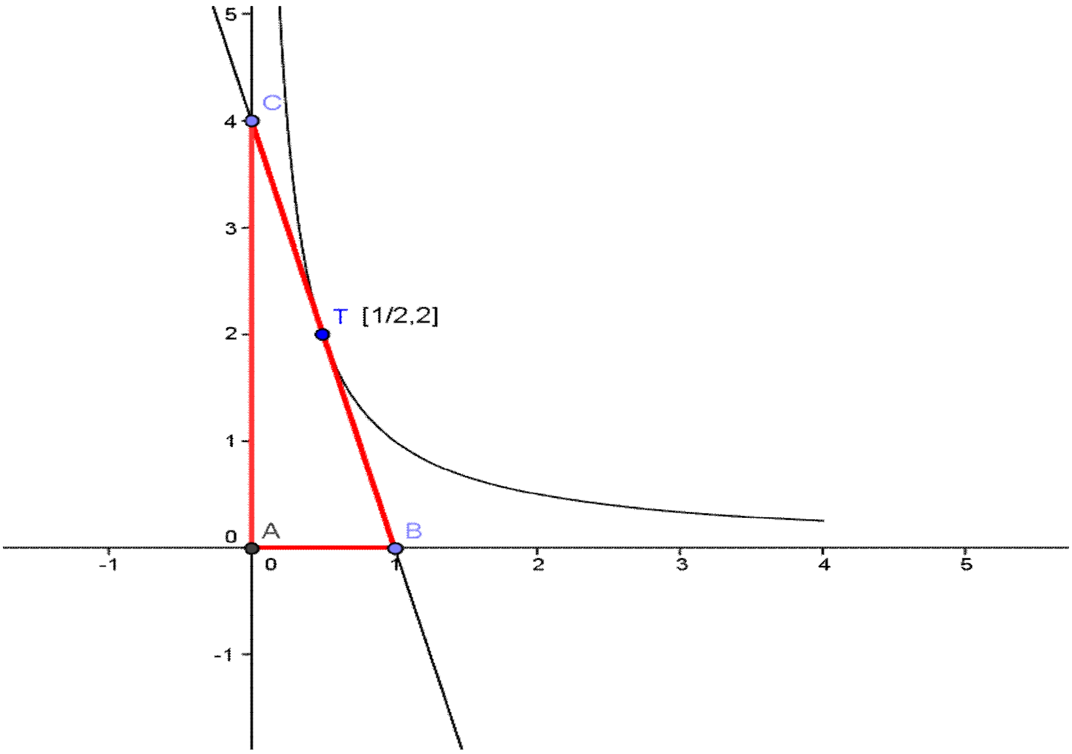
1) Tečna je přímka, kterou vyjádříme ve tvaru $y = ax + b$. Protože prochází bodem $T[1,1]$, platí po dosazení za x a y v rovnici přímky $1 = a + b$, tj. $b = 1 - a$. Grafem funkce f je hyperbola.



Bod T je společný bod přímky a hyperboly a proto musí platit $\frac{1}{x} = ax + b$. Po úpravách dostáváme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx - 1 = 0$. Protože obě křivky mají společný právě jeden bod, musí být diskriminant roven nule. Tedy $D = b^2 + 4a = 0$. Po dosazení $b = 1 - a$ dostáváme rovnic i $(1-a)^2 + 4a = 0$. Odtud již plyne $a = -1, b = 2$. Rovnice tečny je $y = -x + 2$. Trojúhelník ABC je pravoúhlý a jeho vrcholy mají souřadnice $A[0,0], B[2,0], C[0,2]$. Dále je $|AB| = 2, |AC| = 2$. Pro obsah trojúhelníka platí $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2\ j^2$.

2) Provedeme-li stejný výpočet pro bod $T\left[\frac{1}{2},2\right]$, bude mít rovnice tečny tvar $y = -4x + 4$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



Vrcholy trojúhelníku mají v tomto případě souřadnice $A[0,0], B[1,0], C[0,4]$. Pro obsah trojúhelníka platí $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2\ j^2$.

Poznámka: Úlohu je možné řešit užitím metod diferenciálního počtu.

Doplňkové aktivity

Učitel může vést žáky k tomu, aby vyslovili hypotézu, že obsah takového trojúhelníku bude vždy $2\ j^2$ a na volbě bodu T nezávisí. Obecné řešení můžeme zadat dobrým žákům jako téma domácí práce. Uvádíme možný postup řešení:

Vyjdeme z rovnice $\frac{1}{x}=ax+b$, která vede na kvadratickou rovnici $ax^2+bx-1=0$. Z podmínky $D=b^2+4a=0$ dostaneme $a=-\frac{b^2}{4}$. Rovnice tečny má pak tvar $y=-\frac{b^2}{4}x+b$.

Vrcholy trojúhelníku mají v tomto případě souřadnice $A[0,0], B\left[\frac{4}{b},0\right], C[0,b]$. Pro obsah trojúhelníka platí $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{b}\cdot b=2\ j^2$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá

Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.