INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KDY SE DOTKNOU?

Popis aktivity
Geometrická interpretace derivace funkce jako směrnice tečny, řešení soustavy rovnic
Předpokládané znalosti
Kvadratická funkce, logaritmická funkce, derivace funkce

Zadání

Jsou dány funkce $y = kx^2$, kde $k > 0$.

1. Určete $k > 0$ tak, aby se parabola, která je grafem příslušné kvadratické funkce, dotkla grafu funkce $y = \ln x$.
2. Určete souřadnice společného bodu a napište rovnici společné tečny.
3. Situaci znázorněte graficky.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Aby měly příslušné křivky společný bod $T[x_0, y_0]$, musí platit: $kx_0^2 = \ln x_0$.

Aby měly společnou tečnu v bodě *T,* musí se rovnat směrnice této tečny, tedy se musí rovnat derivace příslušných funkcí v bodě x_0.

$$\left(kx_0^2\right)' = \left(\ln x_0\right)'$$

$$2kx_0 = \frac{1}{x_0}$$

$$x_0^2 = \frac{1}{2k}$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$kx_0^2 = \ln x_0$$

$$x_0^2 = \frac{1}{2k}$$

a dosazením za x_0^2 do první rovnice pak rovnici

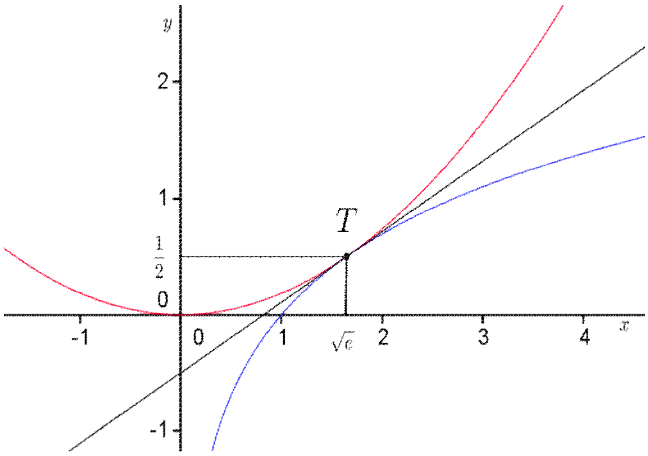
$k\frac{1}{2k} = \ln x_0$, ze které plyne, že $x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ a $k = \frac{1}{2e}$. Jedná se tedy o funkci $y = \frac{1}{2e}x^2$.

2. Druhou souřadnici y_0 společného bodu vypočítáme z funkčního předpisu kterékoliv dané funkce, tedy buď $y_0 = \frac{1}{2e}x_0^2 = \frac{1}{2e}e = \frac{1}{2}$ nebo $y_0 = \ln x_0 = \ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Pak $T\left[\sqrt{e}; \frac{1}{2}\right]$ a rovnice společné tečny *t* v bodě *T* po dosazení do rovnice $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ je $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(x - \sqrt{e}\right)$ resp. ve směrnicovém tvaru $y = \frac{\sqrt{e}}{e}x - \frac{1}{2}$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá

Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

3. Ke grafickému znázornění situace můžeme použít Geogebru. 

Doplňkové aktivity	
K zajímavým výsledkům dospějeme, jestliže místo funkce $y = kx^2$ použijeme funkci $y = kx^3$, $y = kx^4$ atd. Za domácí úkol můžeme zadat žákům řešit stejnou úlohu s obecnou mocninnou funkci s přirozeným exponentem $y = kx^n$.	
Obrazový materiál	Dílo autora