


## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PEVNOST

<b>Popis aktivity</b>
Řešení slovní úlohy pomocí součtu posloupnosti.
<b>Předpokládané znalosti</b>
$n$ -tý člen posloupnosti
<b>Potřebné pomůcky</b>
Kalkulátor
<b>Zadání</b>
<p>Hradby pirátské pevnosti mají čtvercový půdorys. Uprostřed každé strany je dělo namířené na jednu světovou stranu. U každého děla je jedna plechová bedna ve tvaru krychle na dělové koule; na dno bedny se vejde přesně 64 koulí.</p> <p>Po prvním útoku byly bedny rozbity, a proto sbili pomocníci narychlo čtyři prkna alespoň pro spodní stejně početnou vrstvu koulí. Na tuto vrstvu nanosili další koule do pyramidy.</p> <p>Všechny koule se do pyramidy nevešly, proto museli stlouci bednu o větším čtvercovém půdorysu.</p> <p>Úkoly</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Kolik koulí mají k dispozici obránci pevnosti před prvním útokem u všech děl dohromady?</li> <li>Napište počty koulí v jednotlivých vrstvách pyramidy jako členy konečné posloupnosti.</li> <li>Napište tuto posloupnost pomocí vzorce pro <math>n</math>-tý člen.</li> <li>Kolik koulí bylo u každého děla v pyramidě před druhým útokem?</li> <li>Kolik muselo být ve spodní čtvercové vrstvě koulí, aby jich bylo připraveno k obraně přibližně tolik, kolik před prvním útokem?</li> </ol>

<b>Možný postup řešení, metodické poznámky</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>Na dně bedny je 64 koulí, tedy 8 kusů v řadě. Proto je v jedné krychlové bedně 512 koulí. Před prvním útokem mají obránci k dispozici na hradbách celkem 2 048 koulí.</li> <li>V pyramidě zapadá koule z každé vyšší vrstvy mezi čtyři kusy vrstvy spodní. Proto je ve vyšší čtvercové vrstvě vždy o 1 kouli v řadě méně: <math>\{v_n\}_{n=1}^8 = \{64; 49; 36; 25; 16; 9; 4; 1\}</math></li> <li>Klesající posloupnost druhých mocnin přirozených čísel: <math>\{v_n\}_{n=1}^8 = \{(9-n)^2\}_{n=1}^8</math></li> <li>Součet všech členů této posloupnosti: <math>K = \sum_{n=1}^8 n^2 = \underline{204}</math>. U každého děla je 204 kusů koulí.</li> <li>Podle podmínek úlohy je třeba zvýšit počet členů posloupnosti tak, aby součet členů byl nejbližší číslu 512. Znamená to najít <math>n</math>, pro které je hodnota součtu           <math display="block">1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2</math> </li> </ol>

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

nejblíže číslu 512.

Úlohu lze sice řešit složitějším výpočtem nebo graficky, nejjednodušší je však postupně sečítat druhé mocniny. Rychle zjistíme, že

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 11^2 = 506, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = 650,$$

takže nejbližší hodnotu dostáváme, když bude ve spodní řadě 121 koulí.

### Doplňkové aktivity

Skupiny žáků mohou modelovat a vypočítávat, kolik koulí by se dalo navrstvit na různé obdélníkové spodní vrstvy pyramid a najít optimální rozměr, který nejvíce odpovídá počtu koulí v plechové bedně. Je možné, aby základna měla trojúhelníkový tvar nebo tvar pravidelného  $n$ -úhelníku?

### Literatura

Archiv autora

### Obrazový materiál

[www.ClipProject.info](http://www.ClipProject.info), dílo autora