

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## SOUTĚŽ V ŘEŠENÍ LIMIT FUNKCÍ

### Popis aktivity

Výpočet limity funkcí.

### Předpokládané znalosti

Mnohočlen, rozklad mnohočlenu, úpravy goniometrických výrazů, věty pro počítání s limity

### Potřebné pomůcky

Pracovní list pro žáka

### Zadání

Učitel se rozhodl, že pro tři nejlepší žáky třídy uspořádá soutěž v řešení příkladů na výpočet limity funkcí. Nejlepší žák za odměnu dostane zajímavou publikaci.

Každý žák obdržel toto zadání:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} =, & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} =, & \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) =, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} =, & \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right) =, & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} =, & \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} =, \\ \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x} =, & \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} =, & \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} =. \end{aligned}$$

Výsledky ke kterým žáci dospěli, jsou uvedeny v následující tabulce. Zjistěte, kdo dostal od učitele publikaci.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Petr	4	1	1	0	1	3	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
Jan	4	0	$\frac{1}{2}$	0	0	3	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
Karel	4	1	$\frac{1}{3}$	0	2	3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

### Možný postup řešení, metodické poznámky

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x-1)} = 4, \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{(x-5) \cdot (x^2 + 2x + 1)} = 0, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - 1}{x \cdot (\sqrt{1+x^2} + 1)} = 0,$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0,$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{3}{3} = 3,$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{3 \cdot \cos x} = \frac{1}{3},$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x \cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) = 2 + 1 = 3$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) + (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2 + 1)}{(x+1) \cdot (x^2 - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2 + 1)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x - 2 \cos x - \cos x + 1}{2 \cos^2 x + 2 \cos x - \cos x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x \cdot (\cos x - 1) - (\cos x - 1)}{2 \cos x (\cos x + 1) - (\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x - 1) \cdot (2 \cos x - 1)}{(\cos x + 1) \cdot (2 \cos x - 1)} = -\frac{1}{3}$$

Publikaci dostane Jan, který vypočítal správně všechny příklady. Druhý byl Karel s 5 správnými výsledky a třetí Pavel se 4 správnými výsledky.

**Doplňkové aktivity**

Sadu limit lze obměnit.

**Literatura**

Archiv autora