evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MNOHO ČTVERCŮ

Popis aktivity

Výpočet obsahů čtverců jakožto členů nekonečné geometrické řady a výpočet součtu této řady.

Předpokládané znalosti

Nekonečná geometrická řada a existence jejího součtu.

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulátor, pracovní list pro žáka

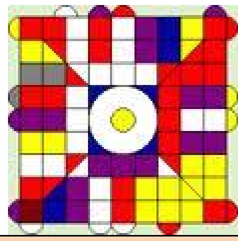
Zadání

Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany 8. Ve středu S úhlopříčky BD je vrchol menšího čtverce, jehož protějším vrcholem je opět bod A. Sestrojíme jeho úhlopříčku rovnoběžnou s BD a použijeme její střed S_1 pro vrchol dalšího čtverce s protějším vrcholem A.

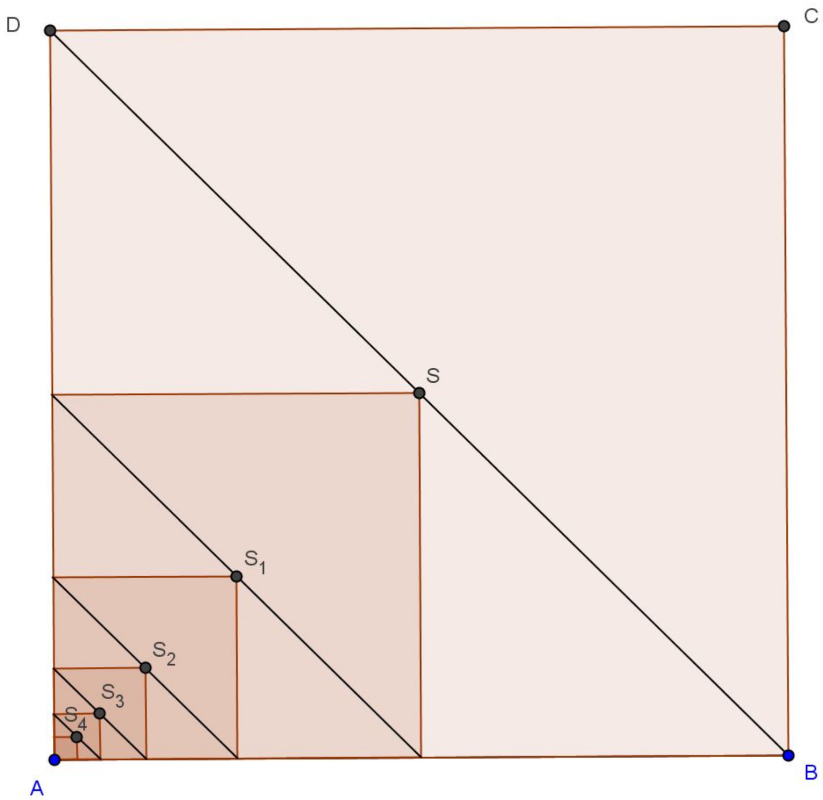
Takto sestrojujeme další zmenšované čtverce.

Úkoly

1. Vypočtěte obsahy alespoň prvních čtyř takto vytvořených čtverců.
2. Zjistěte, zda tyto hodnoty tvoří první čtyři členy nekonečné geometrické posloupnosti. Jestliže ano, určete její kvocient.
3. Vytvořte z členů této posloupnosti nekonečnou řadu, a pokud existuje součet této řady, spočtěte ho.



Možný postup řešení, metodické poznámky



1. Délky stran dalších čtverců jsou poloviční, proto pro jejich obsahy platí: $S_1 = 64$, $S_2 = 16$, $S_3 = 4$, $S_4 = 1$, $S_5 = 0{,}25$ atd.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

2. Je-li délka strany *n*-tého čtverce x_n, potom obsah *n*-tého čtverce je jistě $S_n = x_n^2$.

   Zjistěme, zda je posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická, víme-li, že platí: $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$.

   Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N;\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q$

   Pro posloupnost velikostí obsahů těchto čtverců je tedy:

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = \frac{\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}{x_n^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{S_{n+2}}{S_{n+1}} = \frac{x_{n+2}^2}{x_{n+1}^2} = \frac{\left(\frac{x_n}{4}\right)^2}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

   Závěr: posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická, její kvocient je 0,25.

3. Protože kvocient splňuje podmínku pro existenci součtu ($|q| < 1$), součet existuje:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = \frac{S_1}{1-q}$$

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 64 + 16 + 4 + 1 + \ldots = \frac{64}{1-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{256}{3}}}\cdot$$

   Součet obsahů všech vytvářených čtverců je $\frac{256}{3}\ j^2$.

Doplňkové aktivity

1. Vyřešte stejnou úlohu pro obvody těchto čtverců.
2. Žáci mohou ve skupinách vypočítávat stejnou úlohu s jinou délkou strany prvního čtverce a porovnávat výsledky součtů nekonečných řad.

Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	images.google.com, dílo autora