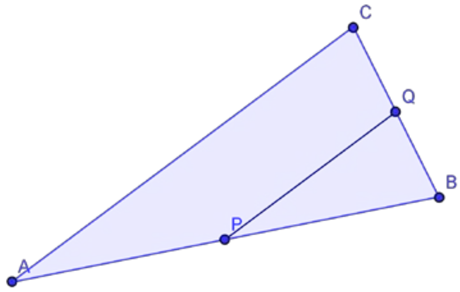
STŘEDNÍ PŘÍČKA - ŘEŠENÍ

1. Body A, B, C tvoří trojúhelník, jestliže vektory $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A$ jsou lineárně nezávislé, tj. neexistuje $k \in R, k \neq 0$ tak, že $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. V tomto případě $\vec{u} = (10; 2)$, $\vec{v} = (8; 6)$, takové k neexistuje.
2. Označ střední příčku PQ, kde P je střed strany AB a Q je střed strany BC.

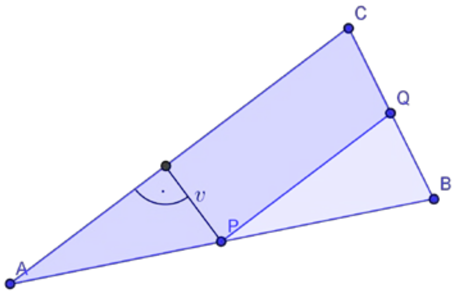


Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickými průměry souřadnic krajních bodů úsečky, tedy $P\left[\frac{-7+3}{2}; \frac{-2+0}{2}\right]$ a $Q\left[\frac{3+1}{2}; \frac{0+4}{2}\right]$ Po úpravě $P = [-2; -1]$ a $Q[2; 2]$.

Směrový vektor střední příčky $Q - P = (4; 3)$. Protože směrový vektor protější strany $C - A = (8; 6) = 2 \cdot (Q - P)$, jsou vektory $C - A$ a $Q - P$ lineárně závislé a tedy střední příčka PQ a strana AC jsou rovnoběžné.

Vypočteš velikosti těchto vektorů, tedy $|C - A| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, $|Q - P| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = \frac{1}{2}|C - A|$ a tím jsi ověřil i druhou vlastnost střední příčky.

3. S využitím výpočtů z předcházející úlohy vypočteš obsah lichoběžníku $PQCA$ podle vzorce z planimetrie, $S_L = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$. Délky jeho základen, tedy velikosti úseček PQ a CA již známe, zbývá vypočítat výšku v jako vzdálenost např. bodu P od přímky AC.



K tomu potřebuješ obecnou rovnici přímky AC ve tvaru $ax+by+c=0$, abys mohl dosadit do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky v rovině.

Protože směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{v}=(8;6)$ z úlohy 1., je normálový vektor této přímky $\vec{n}=(3;-4)=(a;b)$. Koeficient c určíš z podmínky $A\in\leftrightarrow AC$ (nebo $C\in\leftrightarrow AC$). Dostáváš pro bod A: $3\cdot(-7)-4\cdot(-2)+c=0$, tedy $c=13$ a rovnice přímky AC má tvar $3x-4y+13=0$.

Výška $v=\dfrac{|3\cdot(-2)-4\cdot(-1)+13|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{11}{5}$ a obsah lichoběžníku $S_L=\dfrac{(10+5)\cdot\frac{11}{5}}{2}=\dfrac{33}{2}$.

Obsah trojúhelníka ABC můžeš počítat obdobně pomocí vzorce $S=\dfrac{a\cdot v_a}{2}$ (CZ), ale můžeš využít i vzorce z analytické geometrie pomocí vektorového součinu. Využiješ-li vektorů $\vec{u}=(10;2)$ a $\vec{v}=(8;6)$ z úlohy 1., pak $\vec{u}\times\vec{v}=(10;2;0)\times(8;6;0)=(0;0;44)$ a obsah trojúhelníka $S=\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}=\dfrac{44}{2}=22$. Skutečně platí, že $S_L=\dfrac{3}{4}\cdot S=\dfrac{3}{4}\cdot 22=\dfrac{33}{2}$.

Toto tvrzení dokážeš pomocí podobnosti trojúhelníků. $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PBQ$ s koeficientem podobnosti $k=\dfrac{1}{2}$ (body P,Q jsou středy stran), proto pro obsahy S,S' těchto podobných trojúhelníků platí $S'=k^2\cdot S$. V našem případě je obsah trojúhelníka PBQ roven $\dfrac{1}{4}$ obsahu trojúhelníka ABC a zbytek, tedy lichoběžník $PQCA$ musí být roven $\dfrac{3}{4}$ obsahu trojúhelníka ABC, což jsi měl dokázat.