JAK JE TO S PRŮMĚRY?

Popis aktivity

Geometrická interpretace aritmetického, geometrického a harmonického průměru. Dokazování nerovností.

Předpokládané znalosti

Thaletova kružnice, Eukleidovy věty, důkaz sporem.

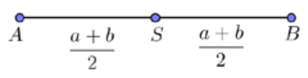
Potřebné pomůcky

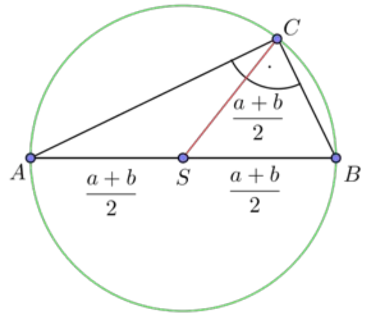
Zadání

1. Jsou dána kladná reálná čísla a, b. Aritmetický průměr čísel a, b je definován vztahem $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$, geometrický průměr vztahem $G(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$ a pro harmonický průměr platí $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Najděte geometrickou interpretaci jednotlivých průměrů.
2. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b platí: $A(a,b) \geq G(a,b) \geq H(a,b)$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

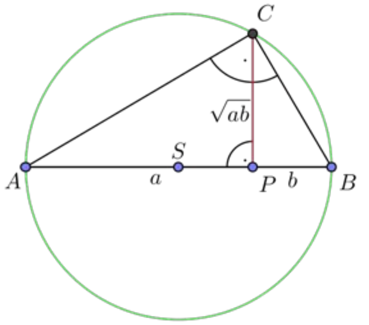
1. Jsou-li kladná reálná čísla a, b velikostmi dvou úseček a sestrojíme-li úsečku AB, jejíž velikost je $a+b$, pak velikost úsečky AS, kde S je střed úsečky AB je právě $\frac{a+b}{2}$, což je $A(a,b)$. Je to však také poloměr Thaletovy kružnice nad průměrem AB neboli velikost libovolné těžnice pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou délky $a+b$ a vrcholem C na Thaletově kružnici.



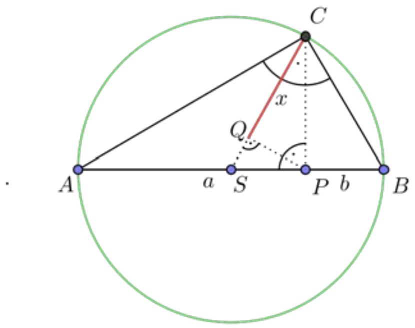


Pro geometrickou interpretaci geometrického průměru sestrojíme znovu Thaletovu kružnici nad průměrem $a+b$ a pravoúhlý trojúhelník ABC s výškou na přeponu v bodě *P*, kde $|AP|:|PB| = a:b$. Pak podle Eukleidovy věty o výšce je velikost této výšky $\sqrt{a \cdot b}$, což je $G(a,b)$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



Také pro znázornění harmonického průměru využijeme Thaletovy kružnice nad průměrem $a+b$ a pravoúhlého trojúhelníka ABC s těžnicí SC a s výškou na přeponu v bodě *P* jako v předcházejícím případě.



V pravoúhlém trojúhelníku SPC sestrojíme výšku na přeponu SC s patou Q. Podle Eukleidovy věty o výšce v trojúhelníku SPC je $|PQ|^2 = x\cdot\left(\frac{a+b}{2}-x\right)$, kde $x=|QC|$ a podle Pythagorovy věty v trojúhelníku PQC je $|PQ|^2=\left(\sqrt{ab}\right)^2-x^2$. Porovnáním obou vztahů dostaneme $x\cdot\left(\frac{a+b}{2}-x\right)=ab-x^2$

$$x\cdot\frac{a+b}{2}-x^2=ab-x^2$$

$$x\cdot\frac{a+b}{2}=ab\text{, tedy } x=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=H(a,b).$$

2. Na posledním obrázku vidíme, že $|SC|\geq|PC|\geq|QC|$, tedy zdá se, že skutečně platí $A(a,b)\geq G(a,b)\geq H(a,b)$, kde a,b jsou velikosti úseček, tedy kladná reálná čísla.
   Toto tvrzení však musíme dokázat.
   Zvolíme důkaz sporem, budeme proto předpokládat, že existuje dvojice kladných reálných čísel a,b tak, že dokazované tvrzení neplatí, čili platí jeho negace, to znamená $A(a,b)<G(a,b)<H(a,b)$.
   Předpokládáme nejprve, že $A(a,b)<G(a,b)$ pro nějakou dvojici a,b, tedy že platí

$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Vzhledem k podmínce, že a,b jsou kladná reálná čísla, můžeme provést postupně ekvivalentní úpravy:

$a+b < 2\cdot\sqrt{ab}$

$(a+b)^2 < 4ab$ (*)

$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$

$a^2 - 2ab + b^2 < 0$

$(a-b)^2 < 0$.

Poslední nerovnost neplatí pro žádnou dvojici reálných čísel, došlo tedy ke sporu s předpokladem – předpoklad neplatí, musí platit jeho negace, tj. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ pro všechna kladná reálná čísla a,b, tedy $A(a,b) \geq G(a,b)$.

Stejně budeme předpokládat, že $A(a,b) < H(a,b)$ platí pro nějakou dvojici a,b, tedy $\frac{a+b}{2} < \frac{2ab}{a+b}$. Hned ve druhém kroku dostáváme nerovnici (*)$(a+b)^2 < 4ab$, proto i v tomto případě můžeme potvrdit platnost vztahu $A(a,b) \geq H(a,b)$. Ke stejnému závěru stejným postupem dospějeme i ve třetím případě.

Doplňkové aktivity

K zajímavé geometrické interpretaci můžeme dospět za předpokladu $a=b$. Žáci sami mohou načrtnout odpovídající obrázek.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.