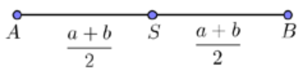
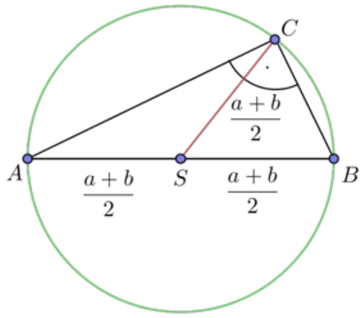
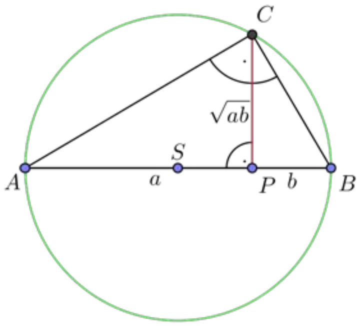
# JAK JE TO S PRŮMĚRY? – ŘEŠENÍ

1. Jsou-li kladná reálná čísla $a, b$ velikostmi dvou úseček a sestrojíme-li úsečku $AB$, jejíž velikost je $a+b$, pak velikost úsečky $AS$, kde $S$ je střed úsečky $AB$ je právě $\frac{a+b}{2}$, což je $A(a,b)$. Je to však také poloměr Thaletovy kružnice nad průměrem $AB$ neboli velikost libovolné těžnice pravoúhlého trojúhelníka $ABC$ s přeponou délky $a+b$ a vrcholem $C$ na Thaletově kružnici.

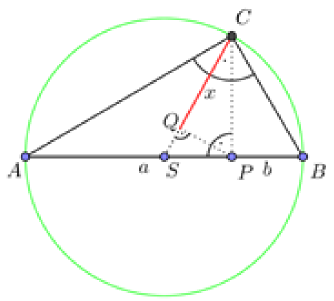



Pro geometrickou interpretaci geometrického průměru sestrojíme znovu Thaletovu kružnici nad průměrem $a+b$ a pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s výškou na přeponu v bodě *P*, kde $|AP|:|PB| = a:b$. Pak podle Eukleidovy věty o výšce je velikost této výšky $\sqrt{a \cdot b}$, což je $G(a,b)$.




Také pro znázornění harmonického průměru využijeme Thaletovy kružnice nad průměrem $a+b$ a pravoúhlého trojúhelníka $ABC$ s těžnicí $SC$ a s výškou na přeponu v bodě *P* jako v předcházejícím případě.




V pravoúhlém trojúhelníku $SPC$ sestrojíme výšku na přeponu $SC$ s patou $Q$. Podle Eukleidovy věty o výšce v trojúhelníku $SPC$ je $|PQ|^2 = x \cdot \left(\frac{a+b}{2} - x\right)$, kde $x = |QC|$ a podle Pythagorovy věty v trojúhelníku $PQC$ je $|PQ|^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 - x^2$. Porovnáním obou

*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*

vztahů dostaneme $x \cdot \left( \frac{a+b}{2} - x \right) = ab - x^2$

$$x \cdot \frac{a+b}{2} - x^2 = ab - x^2$$

$$x \cdot \frac{a+b}{2} = ab \text{, tedy } x = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = H(a,b).$$

2. Na posledním obrázku vidíme, že $|SC| \geq |PC| \geq |QC|$, tedy zdá se, že skutečně platí $A(a,b) \geq G(a,b) \geq H(a,b)$, kde $a,b$ jsou velikosti úseček, tedy kladná reálná čísla.
   Toto tvrzení však musíme dokázat.
   Zvolíme důkaz sporem, budeme proto předpokládat, že existuje dvojice kladných reálných čísel $a,b$ tak, že dokazované tvrzení neplatí, čili platí jeho negace, to znamená
   $A(a,b) < G(a,b) < H(a,b)$.
   Předpokládáme nejprve, že $A(a,b) < G(a,b)$ pro nějakou dvojici $a,b$, tedy že platí $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Vzhledem k podmínce, že $a,b$ jsou kladná reálná čísla, můžeme provést postupně ekvivalentní úpravy:
   $a+b < 2 \cdot \sqrt{ab}$
   $(a+b)^2 < 4ab$ (*)
   $a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$
   $a^2 - 2ab + b^2 < 0$
   $(a-b)^2 < 0$.
   Poslední nerovnost neplatí pro žádnou dvojici reálných čísel, došlo tedy ke sporu s předpokladem – předpoklad neplatí, musí platit jeho negace, tj. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ pro všechna kladná reálná čísla $a,b$, tedy $A(a,b) \geq G(a,b)$.
   Stejně budeme předpokládat, že $A(a,b) < H(a,b)$ platí pro nějakou dvojici $a,b$, tedy $\frac{a+b}{2} < \frac{2ab}{a+b}$. Hned ve druhém kroku dostáváme nerovnici (*) $(a+b)^2 < 4ab$, proto i v tomto případě můžeme potvrdit platnost vztahu $A(a,b) \geq H(a,b)$. Ke stejnému závěru stejným postupem dospějeme i ve třetím případě.