evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Jednota českých matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JE TO TOTÉŽ A NENÍ TO TOTÉŽ

Popis aktivity

Výpočet určitých integrálů a určování obsahů obrazců.

Předpokládané znalosti

Určitý integrál, grafy elementárních funkcí

Zadání

1. Vypočtěte: a) $\int_{-2}^{0}(x+1)^3dx$

   b) $\int_{0}^{2\pi}\sin x\,dx$

   c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}tg\,x\,dx$

   d) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$

2. Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen osou x a křivkou

   a) $y=(x+1)^3$ v mezích od -2 do 0

   b) $y=\sin x$ v mezích od 0 do 2π

   c) $y=tg\,x$ v mezích od $-\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{4}$

   d) $y=\frac{1}{x}$ v mezích od -1 do 1

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Výpočty určitých integrálů budeme provádět pomocí Newton – Leibnitzovy věty. Platí: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, kde F je funkce primitivní k funkci f v $\langle a;b\rangle$. Je-li $a=b$, je $\int_a^a f(x)dx=0$. Tedy počítáme

   a) $\int_{-2}^{0}(x+1)^3dx=\int_{-2}^{0}\left(x^3+3x^2+3x+1\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3x^2}{2}+x\right]_{-2}^{0}=$
   $=0-(4-8+6-2)=0$

   b) $\int_{0}^{2\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos 0)=-1-(-1)=0$

   c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}tgx\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$. Tento integrál budeme řešit substitucí (zavedením nové proměnné). V našem případě

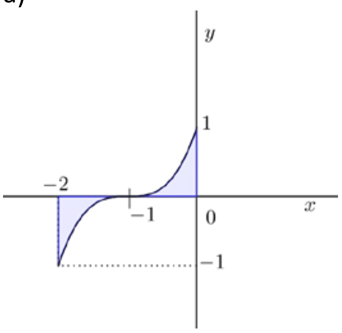
$$\left|\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ x = -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right|$$

Po zavedení proměnné t dostáváme : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t}$. Ale tento integrál je roven 0, protože jsou si rovny dolní a horní mez tohoto integrálu.

d) Protože integrovaná funkce není spojitá v $\langle -1;1 \rangle$, neexistuje k této funkci funkce primitivní a určitý integrál v tomto případě nelze spočítat.

2. Protože máme určit obsah útvaru, znázorníme si vždy nejprve danou situaci v soustavě souřadnic Oxy.

a)

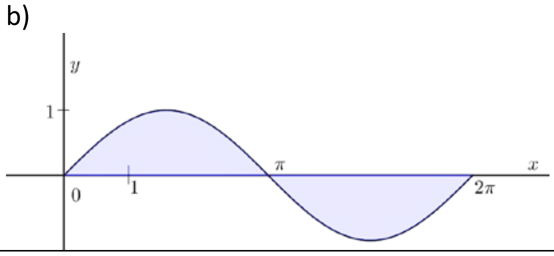


Máme-li určit obsah vybarveného útvaru U, můžeme postupovat dvěma způsoby. Jednodušší je ten, kdy si uvědomíme, že obsah útvaru pod osou x je stejný, jako obsah útvaru nad osou x - vzhledem k výpočtům je vždy výhodné, je-li jedna mez rovna 0. Pak s využitím řešení z úlohy 1a) dostáváme

$$S(U) = 2\int_{-1}^{0} (x+1)^3 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3x^2}{2} + x \right]_{-1}^{0} = 2 \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

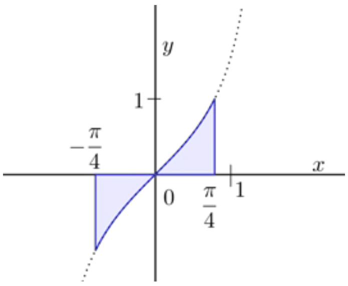
Druhý způsob řešení využívá toho, že obsah útvaru pod osou x je roven absolutní hodnotě příslušného určitého integrálu. V našem případě tedy $S(U) = \left| \int_{-2}^{-1} (x+1)^3 dx \right| + \int_{-1}^{0} (x+1)^3 dx$.

b)



Stejně jako v předcházejícím případě bude výhodné spočítat obsah vybarveného útvaru U takto: $S(U)=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\cdot\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2\cdot(-\cos\pi+\cos 0)=2\cdot(1+1)=4$.

c)



V tomto případě se jedná o lichou funkci a meze jsou souměrné podle počátku – tedy

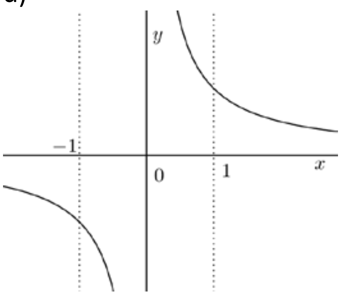
$S(U)=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx$. Využijeme-li výpočet určitého integrálu z úlohy 1c) a změníme meze

($x=0\Rightarrow t=\cos 0=1$), pak dostáváme $S(U)=-2\cdot\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{t}=-\left[2\cdot\ln|t|\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$

$$=-\left[2\cdot\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-2\ln 1\right]=-\left[2\cdot\left(\ln\sqrt{2}-\ln 2-2\cdot 0\right)\right]=2\cdot\ln 2-2\cdot\ln\sqrt{2}=$$

$$=2\cdot\ln 2-2\cdot\frac{1}{2}\ln 2=\ln 2.$$

d)



Křivka, která má omezovat útvar, jehož obsah máme spočítat, je grafem funkce, která není spojitá v $\langle -1;1\rangle$, útvar $U(a,b,f)$, jehož obsah bychom mohli pomocí určitého integrálu spočítat, tedy neexistuje.

Doplňkové aktivity

Můžeme volit i takové příklady, kdy určitý integrál je číslo záporné, abychom zdůraznili, že obsah útvaru dostáváme jen při splnění jistých podmínek.