INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JE TO TOTÉŽ A NENÍ TO TOTÉŽ – ŘEŠENÍ

1. Výpočty určitých integrálů budeme provádět pomocí Newton – Leibnitzovy věty. Platí: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, kde F je funkce primitivní k funkci f v $\langle a;b\rangle$. Je-li $a = b$, je $\int_a^a f(x)dx = 0$. Tedy počítáme

a) $\int_{-2}^{0} (x+1)^3 dx = \int_{-2}^{0} (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3x^2}{2} + x\right]_{-2}^{0} =$
$= 0 - (4 - 8 + 6 - 2) = 0$

b) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Tento integrál budeme řešit substitucí (zavedením nové proměnné). V našem případě

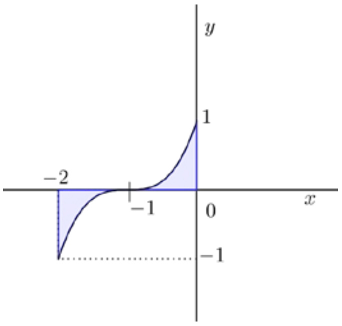
$$\left|\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right|$$

Po zavedení proměnné t dostáváme : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t}$. Ale tento integrál je roven 0, protože jsou si rovny dolní a horní mez tohoto integrálu.

d) Protože integrovaná funkce není spojitá v $\langle -1;1\rangle$, neexistuje k této funkci funkce primitivní a určitý integrál v tomto případě nelze spočítat.

2. Protože máme určit obsah útvaru, znázorníme si vždy nejprve danou situaci v soustavě souřadnic Oxy.

a)

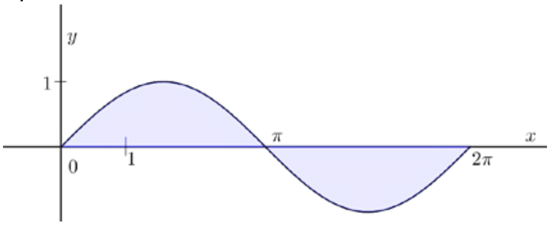


Máme-li určit obsah vybarveného útvaru U, můžeme postupovat dvěma způsoby. Jednodušší je ten, kdy si uvědomíme, že obsah útvaru pod osou x je stejný, jako obsah útvaru nad osou x - vzhledem k výpočtům je vždy výhodné, je-li jedna mez rovna 0. Pak s využitím řešení z úlohy 1a) dostáváme

$$S(U)=2\int_{-1}^{0}(x+1)^3dx=2\cdot\left[\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}=2\cdot\left[0-\left(\frac{1}{4}-1+\frac{3}{2}-1\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

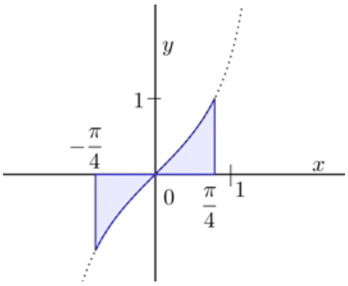
Druhý způsob řešení využívá toho, že obsah útvaru pod osou x je roven absolutní hodnotě příslušného určitého integrálu. V našem případě tedy $S(U)=\left|\int_{-2}^{-1}(x+1)^3dx\right|+\int_{-1}^{0}(x+1)^3dx$.

b)



Stejně jako v předcházejícím případě bude výhodné spočítat obsah vybarveného útvaru U takto: $S(U)=2\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=2\cdot\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2\cdot(-\cos\pi+\cos 0)=2\cdot(1+1)=4$.

c)



V tomto případě se jedná o lichou funkci a meze jsou souměrné podle počátku – tedy

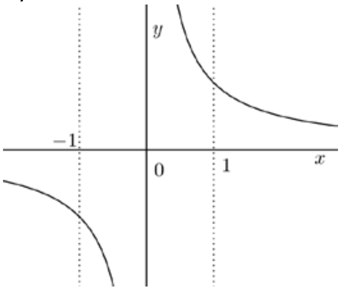
$S(U)=2\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}tgx\,dx$. Využijeme-li výpočet určitého integrálu z úlohy 1c) a změníme meze

($x=0 \Rightarrow t=\cos 0=1$), pak dostáváme $S(U)=-2\cdot\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{t}=-\left[2\cdot\ln|t|\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$

$$=-\left[2\cdot\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-2\ln 1\right]=-\left[2\cdot\left(\ln\sqrt{2}-\ln 2-2\cdot 0\right)\right]=2\cdot\ln 2-2\cdot\ln\sqrt{2}=$$

$$=2\cdot\ln 2-2\cdot\frac{1}{2}\ln 2=\ln 2.$$

d)



Křivka, která má omezovat útvar, jehož obsah máme spočítat, je grafem funkce, která není spojitá v $\langle -1;1\rangle$, útvar $U(a,b,f)$, jehož obsah bychom mohli pomocí určitého integrálu spočítat, tedy neexistuje.