

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KDO VÍ, PŘEDPOVÍ

Popis aktivity

Využití počtu pravděpodobnosti k vytvoření optimální strategie hry.

Předpokládané znalosti

Klasická definice pravděpodobnosti, rozložení pravděpodobnosti, kombinace.

Potřebné pomůcky

Kalkulátor, případně Excel

Zadání

Hra

Úkolem hráče je vytipování výsledků při 8 hodech mincí.

Pravidla hry

1. Hráč zapíše (do prvního volného okénka) svůj tip, v kolika pokusech při 8 hodech mincí dokáže předpovědět správný výsledek, tedy zapíše jedno číslo od 0 do 8 (viz vzor – číslo 3).

Vzor

Tip	3	O	P	P	P	P	O	-	-	
Hra		P	P	P	O	P	O	P	O	
Výsledky	4		x	x		x	x			
Bodování	Celkem 10	8-2	0	1	1	0	2	2	-1	-1

2. Hráč pokračuje vytipováním výsledků v prvních 4 pokusech hodů mincí (zápisy panna nebo orel v prvním řádku tabulky).

3. Provedou se první 4 hody mincí a zapíše se po řadě do druhého řádku tabulky.

4. Hráč zapíše tipy pro zbývajících čtyři hody, ale některé z nich může vynechat (doplnění prvního řádku).

5. Provedou se další 4 hody mincí a v tomtéž pořadí se doplní do druhého řádku tabulky.

Hodnocení výsledků

1. Ve třetím řádku ve sloupcích, do nichž hráč zapsal svůj tip, se v případě shody výsledku a tipu hráče vyznačí křížek. 2. Do levého prázdného pole se poté zapíše počet všech zapsaných křížků.

Bodování

Celková předpověď

1. Za celkovou předpověď (první vyplněný sloupec) je možné získat v případě shody s výsledkem maximálně 8 bodů.

Za odchylku předpovědi a výsledku se od čísla 8 odečítají trestné body. Je-li rozdíl mezi předpovědí a skutečností n , odečítá se $2|n|$ bodů, tedy dvojnásobek chyby. Při rozdílu ± 1 se odečítají 2 body a hodnocení za celkovou předpověď bude 6 bodů. Za rozdíl ± 2 se odečítají 4 body a hodnocení budou 4 body, za rozdíl ± 3 zbudou 2 body, za rozdíl ± 4 a větší se předpověď hodnotí 0 bodů.

Jednotlivé tipy

2. Za každou shodu se přiděluje v prvních 4 pokusech po 1 bodu, ve druhých 4 pokusech po 2 bodech.

3. Za každý vynechaný tip se odečte po 1 bodu.

Úkol 1

Zahrajte si několik her (2-4).

Každý hráč si zapisuje výsledky do tabulky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tip									
Hra									
Výsledky									
Bodování									

Úkol 2

Provedte celkovou statistiku výsledků (kolik hráčů získalo 0-20 bodů).

Úloha 3

Jaká je pravděpodobnost, že hráč vytipuje správný výsledek v prvním (resp. ve druhém) hodu mincí?

Úloha 4

Jaká je pravděpodobnost, že hráč vytipuje oba správné výsledky v prvních dvou hodech mincí?

Úloha 5

Jaká je pravděpodobnost, že hráč vytipuje právě jeden správný výsledek v prvních dvou hodech mincí?

Úloha 6

Jaká je pravděpodobnost, že hráč nevytipuje ani jeden správný výsledek v prvních čtyřech hodech mincí?

Úloha 7

Vytvořte tabulku a graf rozložení pravděpodobností, 0–4 správných tipů při prvních 4 hodech mincí.

Úloha 8

Vytvořte tabulku a graf rozložení pravděpodobností, 0–6 správných tipů při prvních 6 hodech mincí.

Úkol 9

Zahrajte si hru znovu a pokuste se poučit ze zjištěných pravděpodobností.

Úkol 10

Prodiskutujte různé strategie hry a pokuste se optimalizovat průběh hry.

Úkol 11

Vytvořte si vlastní pravidla a bodování hry.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Úloha 3

Jaká je pravděpodobnost, že hráč vytipuje správný výsledek v prvním (resp. ve druhém) hodu mincí?

Řešení: V každém hodu existují dva možné výsledky, ale příznivý bude právě jeden. $P = \frac{1}{2}$.

Úloha 4

Jaká je pravděpodobnost, že hráč vytipuje oba správné výsledky v prvních dvou hodech mincí?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

První způsob řešení:

Pravděpodobnost, že se hráč trefí v libovolném hodu, je $\frac{1}{2}$. Oba pokusy jsou nezávislé. $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Druhý způsob řešení:

	Možné výsledky			
1. hod	Ano	Ano	Ne	Ne
2. hod	Ano	Ne	Ano	Ne

„Ano“ je zapsáno v případech, že hráč tipoval správně. Příznivá dvojice výsledků je jediná ze 4 možných.

Úloha 5

Jaká je pravděpodobnost, že hráč vytipuje právě jeden správný výsledek v prvních dvou hodech mincí?

První způsob řešení:

Oba dva hody mincí jsou na sobě nezávislé. Vyhovují dvě neslučitelné situace. Hráč správně tipuje v prvním hodu a současně chybuje ve druhém, nebo opačně. $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Druhý způsob řešení:

	Možné výsledky			
1. hod	Ano	Ano	Ne	Ne
2. hod	Ano	Ne	Ano	Ne

„Ano“ je zapsáno v případech, že hráč tipoval správně. Příznivé dvojice výsledků jsou 2 ze 4 možných.

Úloha 6

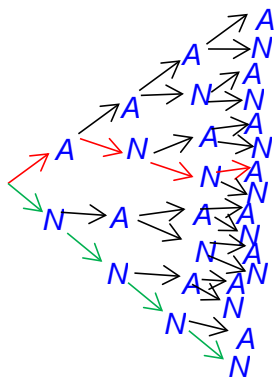
Jaká je pravděpodobnost, že hráč nevytipuje ani jeden správný výsledek v prvních čtyřech hodech mincí?

První způsob řešení:

Pravděpodobnost, že se hráč netrefí v libovolném hodu, je $\frac{1}{2}$. všechny čtyři pokusy jsou nezávislé.

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Druhý způsob řešení:



V obrázku jsou zakresleny všechny možnosti, které mohou nastat při tipování jednoho, dvou, tří nebo čtyř hodů mincí (cesty obsahující jednu, dvě, tři nebo čtyři šipky). Každý pokus navíc zdvojnásobí počet možností, které mohou nastat.

Červeně je zapsána jeden z 16 možných výsledků při tipování čtyř výsledků.

„N“ je zapsáno v případě, že hráč tipoval chybně. Čtveřice chybných tipů je právě jedna z 16 možných a je vyznačena zeleně.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úloha 7

Vytvořte tabulku a graf rozložení pravděpodobností, 0–4 správných tipů při prvních 4 hodech mincí.

Řešení:

Existuje jediná možnost, jak všechny čtyři výsledky vytipovat chybně.

Jediný správný výsledek lze vytipovat v právě jednom ze čtyř pokusů, tedy čtyřmi způsoby.

Dva správné výsledky lze získat vytipováním libovolné dvojice ve čtyřech pokusech, tedy $\binom{4}{2}$ způsoby.

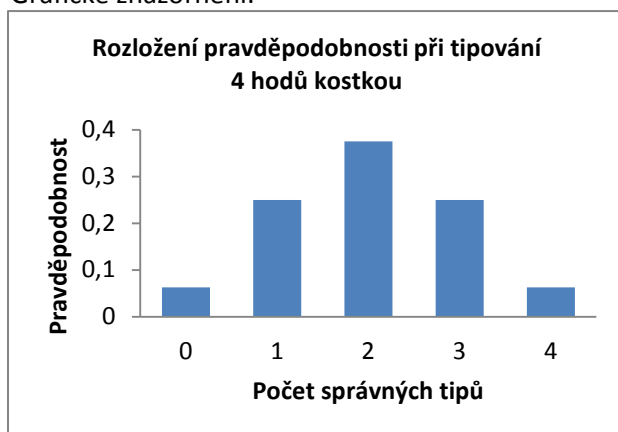
Tři správné výsledky lze získat vytipováním libovolné trojice ve čtyřech pokusech, tedy $\binom{4}{3}$ způsoby.

Podobně existuje jediná možnost, tj. $\binom{4}{4}$, že budou všechny tipy správné.

Počet všech možných výsledků, které mohou nastat je $2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

Rozložení pravděpodobností počtu správně vytipovaných výsledků				
0	1	2	3	4
$P(0) = \frac{\binom{4}{0}}{2^4} = \frac{1}{16}$	$P(1) = \frac{\binom{4}{1}}{2^4} = \frac{1}{4}$	$P(2) = \frac{3}{8}$	$P(3) = \frac{1}{4}$	$P(4) = \frac{1}{16}$

Grafické znázornění:



Druhý způsob řešení:

Příznivé možnosti lze vyhledat a napočítat ve schématu druhého způsobu řešení úlohy 6.

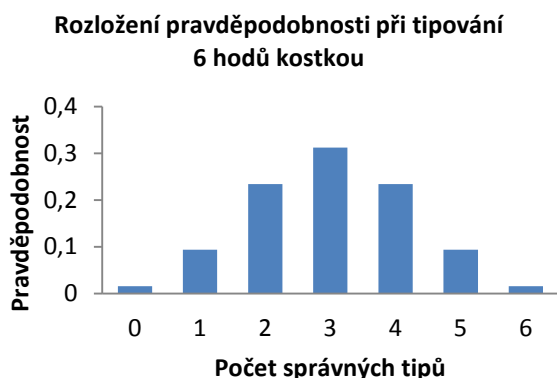
Úloha 8

Vytvořte tabulku a graf rozložení pravděpodobností, 0–6 správných tipů při prvních 6 hodech mincí.

Rozložení pravděpodobností počtu správně vytipovaných výsledků						
0	1	2	3	4	5	6
0,015625	0,09375	0,234375	0,3125	0,234375	0,09375	0,015625

Grafické znázornění

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Úkol 10

Prodiskutujte různé strategie hry a pokuste se optimalizovat průběh hry.

Řešení:

Nejpravděpodobněji se podaří vytipovat polovina provedených pokusů, tedy 2 ze 4, 3 z 6 nebo 4 z 8. Vždy se jedná o méně než poloviční pravděpodobnost, tedy spíše nastane některá z ostatních možností. Protože je možné tipovat 4-8 pokusů bude zřejmě výhodné tipovat 3 nebo 4 možnosti a podle výsledku v prvních čtyřech pokusech se rozhodnout, kolik ze zbývajících výsledků ještě vytipujeme. Při větší absenci tipů se však zvyšuje počet trestných bodů.

Úkol 11

Vytvořte si vlastní pravidla a bodování hry.

Žáci mohou stanovit jiné podmínky pro přidělování bodů, např. tak, aby bylo výhodnější tipovat 6 nebo 7 správných odpovědí.

Doplňkové aktivity

Přesahy a vazby

Kombinatorika, grafy, statistika