INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KTERÉ ČÍSLO JE VĚTŠÍ?

Popis aktivity

Hledání většího ze dvou daných čísel bez použití kalkulátoru.

Předpokládané znalosti

Základní věty o reálných číslech, mocniny s racionálním exponentem, pojem faktoriál, úpravy výrazů s faktoriály.

Zadání

Rozhodněte (bez použití kalkulátoru), které ze dvou daných čísel x, y je větší:

1. $x = \sqrt[5]{2},\ y = \sqrt[4]{2}$
2. $x = \sqrt[5]{0,2},\ y = \sqrt[4]{0,2}$
3. $x = \sqrt[7]{7},\ y = \sqrt{2}$
4. $x = \sqrt{7} + \sqrt{10},\ y = \sqrt{5} + \sqrt{12}$
5. $x = \dfrac{1}{999999} + \dfrac{1}{1000001},\ y = \dfrac{2}{1000000}$
6. $x = \dfrac{23456798}{29876543},\ y = \dfrac{23456789}{29876534}$
7. $x = 50! + 53!,\ y = 51! + 52!$
8. $x = 1004! - 1002!,\ y = 1005! - 1003!$

Možný postup řešení, metodické poznámky

První, pátou a sedmou úlohu je vhodné počítat s celou třídou, ostatní úlohy mohou žáci řešit samostatně nebo ve skupinách.

1. Abychom odstranili obě odmocniny, umocníme obě čísla na dvacátou (nejmenší společný násobek čísel 4 a 5). Dostaneme

$\left(\sqrt[5]{2}\right)^{20} = 2^4 = 16$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{20} = 2^5 = 32$. Protože $32 > 16$, je $\sqrt[4]{2} > \sqrt[5]{2}$, tedy $y > x$.

2. Budeme postupovat stejně – v tomto případě $\left(\sqrt[5]{0,2}\right)^{20} = 0,2^4 = 0,0016$,

   $\left(\sqrt[4]{0,2}\right)^{20} = 0,2^5 = 0,00032$. Protože $0,0016 > 0,00032$, je $\sqrt[5]{0,2} > \sqrt[4]{0,2}$, tedy $x > y$.

3. Nejmenší společný násobek čísel 7 a 2 je 14.

   $\left(\sqrt[7]{7}\right)^{14} = 7^2 = 49$, $\left(\sqrt{2}\right)^{14} = 2^7 = 128$. $128 > 49$, tedy $y > x$.

4. Tentokrát umocníme obě čísla na druhou. Dostáváme

   $\left(\sqrt{7} + \sqrt{10}\right)^2 = 7 + 2 \cdot \sqrt{70} + 10 = 17 + 2 \cdot \sqrt{70}$

   $\left(\sqrt{5} + \sqrt{12}\right)^2 = 5 + 2 \cdot \sqrt{60} + 12 = 17 + 2 \cdot \sqrt{60}$. Protože $\sqrt{70} > \sqrt{60}$, vidíme, že $x > y$.

5. Před řešením této úlohy připomeneme, že pro reálná čísla x, y platí:

   $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$.

   Položíme-li v této úloze $999999 = a$, pak $1000001 = a + 2$ a $1000000 = a + 1$, tedy

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

$x=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}$, $y=\frac{2}{a+1}$. Rozdíl

$$x-y=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}-\frac{2}{a+1}=\frac{(a+2)\cdot(a+1)+a\cdot(a+1)-2a\cdot(a+2)}{a\cdot(a+2)\cdot(a+1)}=$$

$$=\frac{a^2+3a+2+a^2+a-2a^2-4a}{a\cdot(a+2)\cdot(a+1)}=\frac{2}{a\cdot(a+2)\cdot(a+1)}>0,$$ tedy $x>y$.

6. Použijeme postup z předcházejícího příkladu, zavedeme substituci $23456789=a$, $23456798=a+9$, $29876534=b$, $29876543=b+9$ a budeme zkoumat rozdíl $x-y=\frac{a+9}{b+9}-\frac{a}{b}=\frac{b\cdot(a+9)-a\cdot(b+9)}{(b+9)\cdot b}==\frac{ba+9b-ab-9a}{(b+9)\cdot b}=$

   $=\frac{9\cdot(b-a)}{b\cdot(b+9)}>0$, protože $b>a$, opět tedy platí $x>y$.

   Mohli jsme však také použít postup, který slouží k porovnávání racionálních čísel zapsaných zlomky $\frac{p}{q},\frac{r}{s}$:

   $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}\Leftrightarrow ps>qr$.

7. Připomeneme (nebo vysvětlíme) zápis $n!$ a upravíme čísla x, y takto:

   $x=50!+53!=50!\cdot(1+53\cdot52\cdot51)$

   $y=51!+52!=51!\cdot(1+52)=51!\cdot53=50!\cdot51\cdot53$

   $x-y=50!\cdot(1+53\cdot52\cdot51)-50!\cdot51\cdot53=50!\cdot(1+53\cdot52\cdot51-51\cdot53)=$

   $=50!\cdot[1+53\cdot51(52-1)]=50!\cdot(1+53\cdot51\cdot51)>0$, proto $x>y$.

8. Určíme rozdíl čísel x, y

   $x-y=1004!-1002!-(1005!-1003!)=1004!-1002!-1005!+1003!=$

   $=1002!\cdot(1004\cdot1003-1-1003\cdot1005\cdot1004+1003)=$

   $=1002!\cdot(1005\cdot1003-1-1003\cdot1005\cdot1004)=$

   $=1002!\cdot(-1003\cdot1005\cdot1003-1)<0$, protože výraz v závorce je <0. V tomto případě je proto $y>x$.

Doplňkové aktivity

Pokud bychom změnili formulaci např. 4. úkolu na: Dokažte, že $\sqrt{7}+\sqrt{10}>\sqrt{5}+\sqrt{12}$, můžeme provést důkaz sporem:

Budeme předpokládat, že dané tvrzení neplatí, tedy platí jeho negace: $\sqrt{7}+\sqrt{10}\le\sqrt{5}+\sqrt{12}$. Protože na obou stranách nerovnosti jsou nezáporná čísla, můžeme umocnit a postupnými ekvivalentními úpravami dostaneme evidentně nepravdivou nerovnost $70\le60$. Došli jsme ke sporu s předpokladem, musí tedy platit dokazované tvrzení.

Poznámky	Pokud není probrána kombinatorika, je vhodné řešit prvních šest úloh.