INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

NEBOJTE SE INVERZE

Popis aktivity
Určování funkčních předpisů pro inverzní funkci, definičního oboru a oboru hodnot funkce, sestrojování grafů navzájem inverzních funkcí.
Předpokládané znalosti
Podmínka pro existenci inverzní funkce, funkční předpis, definiční obor a obor hodnot, vyjadřování neznámé ze vzorce, osová souměrnost.
Zadání

1. Jsou dány funkce a) $f: y=-2x+3, x\in(-\infty;0\rangle$

   b) $g: y=(x+1)^2-4, x\in\langle-1;\infty)$

Rozhodněte, zda k daným funkcím existují funkce inverzní. Pokud ano, určete jejich funkční předpis, definiční obor a obor hodnot a sestrojte grafy obou funkcí v téže soustavě souřadnic Oxy.

2. Ke každé funkci *f* v prvním sloupci tabulky vyberte funkci *g* z druhého sloupce tak, aby vznikla dvojice inverzních funkcí.

$f_1: y=\dfrac{1}{x+2}, x\neq-2$	$g_1: y=\dfrac{1}{x-3}, x\neq-3$
$f_2: y=\sqrt[4]{x+3}, x\geq-3$	$g_2: y=\log_2 x-3, x>0$
$f_3: y=2^{x+3}, x\in R$	$g_3: y=e^x+3, x\in R$
$f_4: y=\dfrac{x}{2}-3, x\in R$	$g_4: y=2\cdot(x+3), x\in R$
$f_5: y=\dfrac{1}{x}+3, x\neq0$	$g_5: y=\dfrac{1}{x}-2, x\neq0$
$f_6: y=\ln(x-3), x>3$	$g_6: y=x^4-3, x\in R$

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. a) Daná funkce $f: y=-2x+3, x\in(-\infty;0\rangle$ je lineární, klesající, tedy prostá, proto k ní existuje funkce inverzní. $f(0)=3$ a $\forall x\leq0$ je $f(x)\geq3$.

   Předpis pro inverzní funkci dostaneme z předpisu dané funkce tak, že buď nejprve zaměníme x, y a pak opět vyjádříme y jako funkci x nebo nejprve vyjádříme x jako funkci y a pak zaměníme x, y. Můžeme vyzkoušet oba způsoby.

   f^{-1}: $x=-2y+3$ (zaměnili jsme x, y)

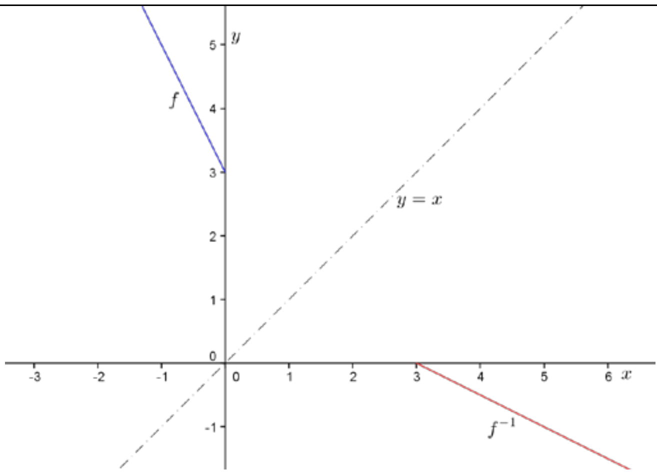
   $2y=-x+3$

   $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}, \; x\geq3$

   Protože se jedná o prosté funkce a zaměnili jsme x, y, je $D(f^{-1})=H(f)=\langle3;\infty)$, $H(f^{-1})=D(f)=(-\infty;0\rangle$.

   Grafy obou funkcí sestrojené v téže soustavě souřadnic jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu, tedy podle přímky o rovnici $y=x$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



b) Funkce $g: y=(x+1)^2-4, x\in\langle -1;\infty)$ je kvadratická, jejím grafem je část paraboly.

V $\langle -1;\infty)$ se jedná o funkci prostou, tedy k ní existuje funkce inverzní. $f(-1)=-4$ a $\forall x\geq -1$ je $f(x)\geq -4$.

f^{-1}: $(x+1)^2=y+4$

$|x+1|=\sqrt{y+4}$. Protože $x\geq -1$, je

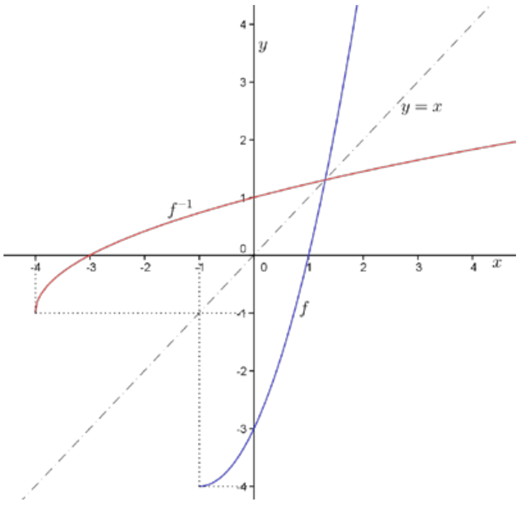
$x+1=\sqrt{y+4}$

$x=\sqrt{y+4}-1$. A po záměně x, y

$y=\sqrt{x+4}-1$

$D(f^{-1})=H(f)=\langle -4;\infty)$, $H(f^{-1})=D(f)=\langle -1;\infty)$.

Grafy obou funkcí sestrojené v téže soustavě souřadnic jsou opět souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.



2. Nyní mohou žáci pracovat ve skupinách. Rozhodování o dvojicích navzájem inverzních funkcí

	nám umožní například vyjádření funkčních předpisů inverzních funkcí k funkcím v levém sloupci nebo náčrtky grafů a porovnávání definičních oborů a oborů hodnot. Některé dvojice mohou odhadnout úvahou – k funkci lineární bude inverzní zase lineární, k funkci logaritmické funkce exponenciální a naopak…Ve všech případech se jedná o funkce elementární, jejichž grafy žáci znají a vědí, že se jedná o funkce prosté. Správné dvojice jsou: f_1, g_5 f_2, g_6 f_3, g_2 f_4, g_4 f_5, g_1 f_6, g_3
Doplňkové aktivity	
Pokud je probrána goniometrie, můžeme s žáky diskutovat o funkcích inverzních k funkcím goniometrickým a především zdůraznit omezení definičního oboru. Grafy funkcí mohou načrtnout sami, prozradíme název cyklometrické funkce a označení např. $\sin^{-1}$,… na kalkulátorech.	
Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.