NEDOVOLENÉ KRÁCENÍ ANEB VÝJIMKA POTVRZUJE PRAVIDLO

Popis aktivity

Úpravy výrazů s použitím vzorců pro rozklady dvojčlenů

Předpokládané znalosti

Vzorec a^3+b^3, krácení, definiční obor výrazu, řešení kvadratické rovnice

Zadání

1. Ověřte, že $\forall a,b\in R, a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge b\neq 2a$ platí: $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$
2. Rozhodněte, zda $\exists a,b\in R, a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge b\neq 2a$ tak, že platí: $\dfrac{a^2+b^2}{a^2+(a-b)^2}=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Začneme zopakováním příslušného vzorce pro rozklad součtu třetích mocnin a připomeneme podmínky krácení. Ověření správnosti uvedené rovnosti provedeme úpravou levé strany.

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)}{\left[a+(a-b)\right]\cdot\left[a^2-a(a-b)+(a-b)^2\right]}=$$

$$=\frac{(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)}{\left[a+(a-b)\right]\cdot\left[a^2-a^2+ab+a^2-2ab+b^2\right]}=\frac{(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)}{\left[a+(a-b)\right]\cdot\left[a^2-ab+b^2\right]}=$$

$=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$, protože výraz a^2-ab+b^2 je různý od nuly $\forall a,b\in R, a\neq 0\wedge b\neq 0$, tedy můžeme tímto výrazem krátit. Úpravami levé strany rovnosti jsme dostali výraz na straně pravé, rovnost tedy platí pro všechna reálná čísla a,b, pro která má výraz smysl.

2. Předcházející úkol vede k otázce, která je formulována ve druhé úloze. Budeme předpokládat, že taková čísla a,b existují a uvedená rovnost platí. Tedy

$\dfrac{a^2+b^2}{a^2+(a-b)^2}=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$. Ekvivalentními úpravami dostáváme

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[a+(a-b)\right]=(a+b)\cdot\left[a^2+(a-b)^2\right]$$

$\left(a^2+b^2\right)\cdot(2a-b)=(a+b)\cdot\left(2a^2-2ab+b^2\right)$. Po roznásobení a dalších úpravách dostaneme rovnici

$2b^3-3ab^2+a^2b=0$, neboli po vytknutí b

$b\cdot\left(2b^2-3ab+a^2\right)=0$

Pokud by $b=0$, pak i $a=0$, ale to odporuje podmínkám úlohy. Druhá možnost, tedy $2b^2-3ab+a^2=0$ vede k řešení kvadratické rovnice (buď s neznámou b a parametrem a nebo s neznámou a a parametrem b). Budeme-li řešit tuto rovnici s neznámou b, je diskriminant $D=9a^2-8a^2=a^2>0\,\forall a\neq 0$, rovnice má tedy dvě různá řešení

$b_{1,2}=\dfrac{3a\pm a}{4}$, tj. $b=a$ nebo $b=\dfrac{a}{2}$. Můžeme tedy říci, že taková reálná čísla a,b existují,

ale obecně uvedená rovnost neplatí.
Doplňkové aktivity
Druhý úkol mohou žáci řešit ve skupině. Pokud začnou „hádáním“, mohou najít dvojice a, b, kde $a = b$ a pro která rovnost platí a úkol bude splněn (formulace: Rozhodněte, zda $\exists$ …). Pak ale může učitel položit otázku, zda jsou to všechny možné dvojice a zda neexistují další možnosti.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.