NEJDELŠÍ ÚSEČKA

Popis aktivity

Nalezení nejdelší horizontální úsečky mezi dvěma křivkami.

Předpokládané znalosti

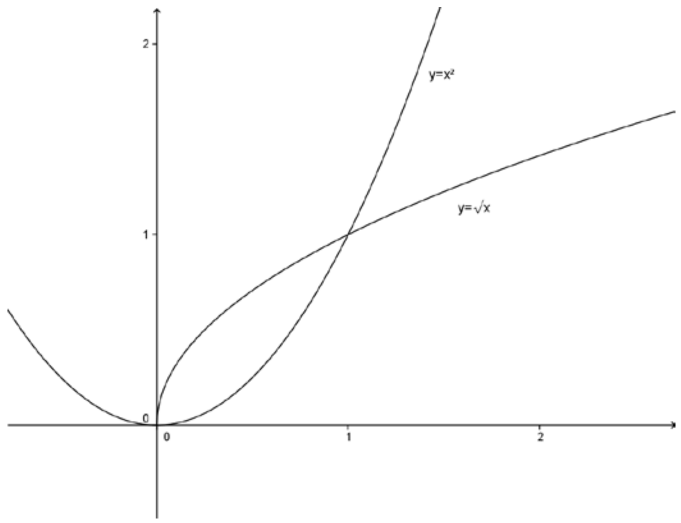
Grafy funkcí, derivace

Potřebné pomůcky

Kalkulátor

Zadání

Jsou dány grafy funkcí y = x^2 a y = $\sqrt{x}$ v intervalu (0,1)



1. Nalezněte nejdelší úsečku rovnoběžnou s osou x mezi grafy funkcí y = x^2 a y = $\sqrt{x}$ v intervalu (0,1)
2. Nalezněte nejdelší úsečku rovnoběžnou s osou y mezi grafy funkcí y = x^2 a y = $\sqrt{x}$ v intervalu (0,1)

Možný postup řešení, metodické poznámky

Úlohu je vhodné demonstrovat v přiloženém apletu (geogebra).

1.

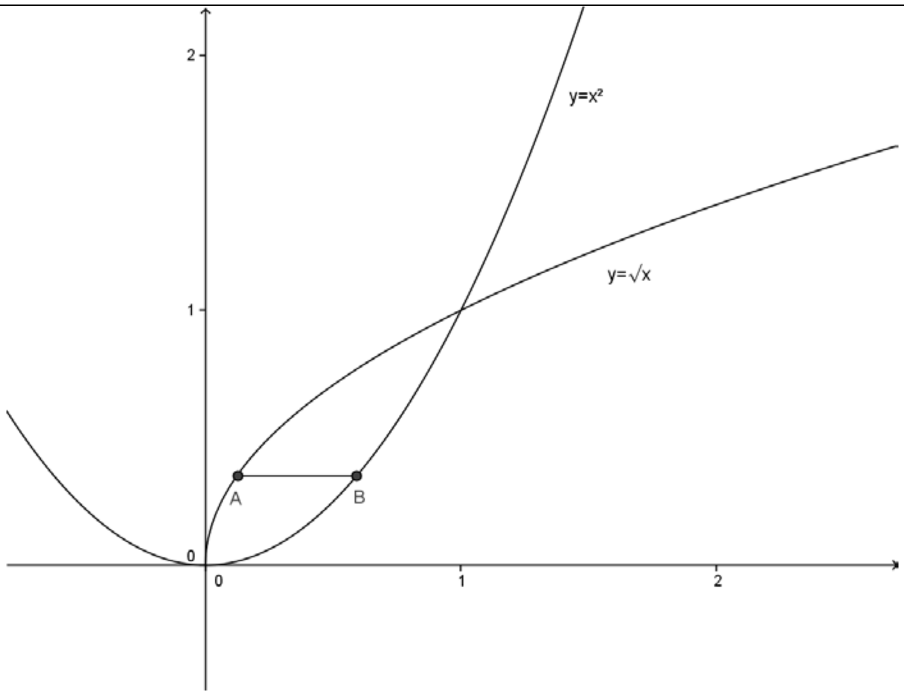
Označme souřadnice krajních bodů úsečky A[a, $\sqrt{a}$], B[b, b^2]. Protože je úsečka rovnoběžná s osou x, platí $\sqrt{a} = b^2$, tedy $a=b^4$.

Délka úsečky je $D = b-a = b-b^4$ je polynomickou funkcí b.

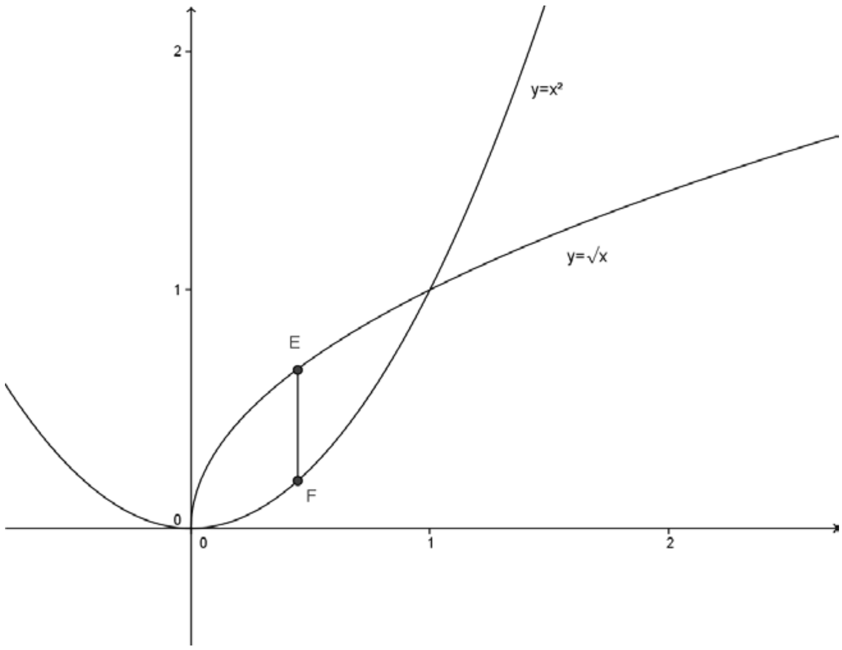
Derivace funkce $D' = 1-4b^3$ existuje v celém intervalu (0,1). Extrém funkce nastane pro hodnotu $b=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Maximální délka úsečky AB je $D = b-b^4 = \frac{3}{4}.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Přibližná hodnota je 0,47.

Ověření extrému (maximum): druhá derivace $D'' = -12b$ je záporná pro všechna b z intervalu (0,1).

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je H. Kommová
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



2.



Označme souřadnice bodů $E[x, \sqrt{x}]$, $F[x, x^2]$. Délka úsečky EF je $y = \sqrt{x} - x^2$.
Funkce je derivovatelná pro všechna x z intervalu (0,1), derivace $y' = \frac{1}{2} . x^{-1/2} - 2x$.

Extrém nastane pro $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Maximální délka úsečky je stejná jako v úkolu 1.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je H. Kommová
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Poznámka: Funkce $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ jsou navzájem inverzní, proto jsou maximální délky úseček v obou směrech stejné.	
Doplňkové aktivity	
Úkol 2 je vhodný jako cvičení (domácí úkol) po vyřešení úkolu 1.	
Obrazový materiál	Dílo autora