

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

NEKONEČNÁ SPIRÁLA

Popis aktivity

Výpočet délek stran trojúhelníku užitím podobnosti trojúhelníků, použití vzorce pro součet nekonečné geometrické řady, konstrukce trojúhelníka.

Předpokládané znalosti

Podobnost trojúhelníků, geometrická posloupnost, nekonečná geometrická řada, polohová konstrukční úloha

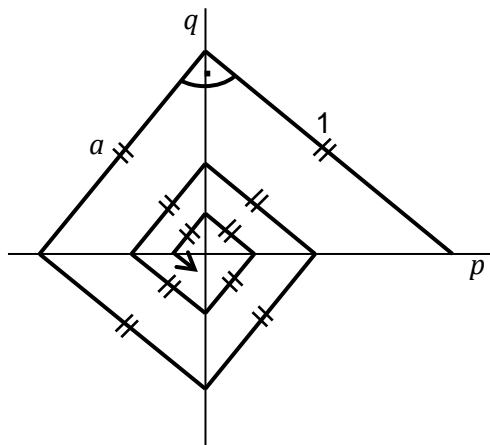
Potřebné pomůcky

Ke konstrukcím je možné využít Cabri geometrii nebo GeoGebra.

Zadání

Úloha 1

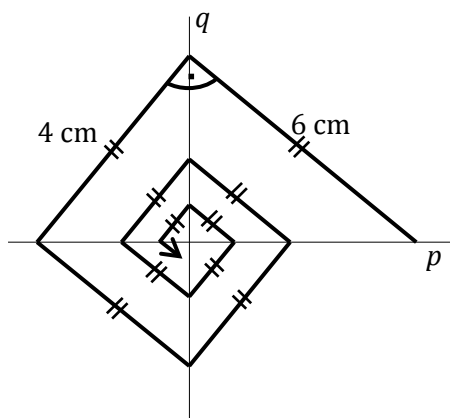
Jsou dány kolmé přímky p , q . Vypočtete délku nekonečné lomené čáry naznačené na obrázku, je-li délka a druhého úseku menší než 1 (jednotka).



Úloha 2

V rovině jsou umístěny kolmé přímky p , q . Sestrojte prvních 5 úseků pravouhlé lomené čáry s vrcholy na obou těchto přímkách, měří-li první úsek 6 cm a druhý úsek 4 cm a vypočtete délku čáry, pokud by pokračovala dále bez omezení počtu úseků.

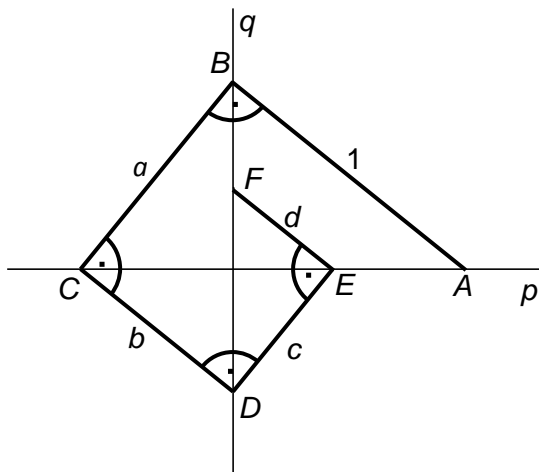
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Možný postup řešení, metodické poznámky

Úloha 1

Označme vrcholy lomené čáry A, B, C, D, E, F, \dots , délky úseků jsou postupně $1, a, b, c, d, \dots$.



Pravoúhlé trojúhelníky $ABC, BCD, CDE, DEF, \dots$ jsou podobné (podle věty uu), tedy platí:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a^2$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = \frac{b^2}{a} = \frac{a^4}{a} = a^3$$

$$\frac{c}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow d = \frac{c^2}{b} = \frac{a^6}{a^2} = a^4, \dots$$

Úseky $1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$ jsou členy geometrické posloupnosti s kvocientem $a < 1$. Existuje proto součet příslušné nekonečné geometrické řady $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$, který určuje hledanou délku nekonečné lomené čáry. Platí tedy $s = \frac{1}{1-a}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úloha 2

Jedná se o polohovou úlohu, tedy přímky p , q jsou pevně dány.

Nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 4 cm a 6 cm. Tento trojúhelník otočíme tak, aby přepona byla rovnoběžná s přímkou p . Dále využijeme posunutí ve směru přímky q a ve směru přímky p , aby přepona ležela na přímce p a vrchol pravého úhlu na přímce q . Pak sestrojíme příslušný počet kolmých úseků podle zadání.

Z úlohy 1 plyne, že jednotlivé úseky tvoří členy nekonečné geometrické posloupnosti s prvním

členem 6 a kvocientem a , kde $a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Protože je splněna podmínka konvergence příslušné

nekonečné geometrické řady ($a < 1$), je hledaná délka lomené čáry $s = \frac{6}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18$ (cm).

Doplňkové aktivity

Můžeme načrtnout obrázek lomené čáry pro $a > 1$ a žáci zdůvodní, proč délku nekonečné lomené čáry nelze určit.

Obrazový materiál

Dílo autora