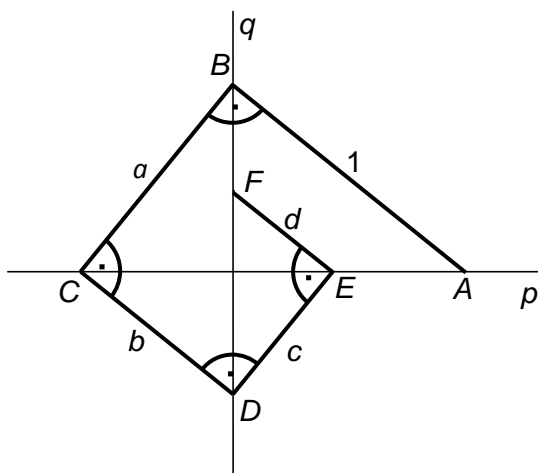


## NEKONEČNÁ SPIRÁLA - ŘEŠENÍ

### Úloha 1

Označme vrcholy lomené čáry  $A, B, C, D, E, F, \dots$ , délky úseků jsou postupně  $1, a, b, c, d, \dots$ .



Pravoúhlé trojúhelníky  $ABC, BCD, CDE, DEF, \dots$  jsou podobné (podle věty  $uu$ ), tedy platí:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a^2$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = \frac{b^2}{a} = \frac{a^4}{a} = a^3$$

$$\frac{c}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow d = \frac{c^2}{b} = \frac{a^6}{a^2} = a^4, \dots$$

Úseky  $1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$  jsou členy geometrické posloupnosti s kvocientem  $a < 1$ . Existuje proto součet příslušné nekonečné geometrické řady  $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$ , který určuje hledanou délku nekonečné lomené čáry. Platí tedy  $s = \frac{1}{1-a}$ .

### Úloha 2

Jedná se o polohovou úlohu, tedy přímky  $p, q$  jsou pevně dány.

Nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 4 cm a 6 cm. Tento trojúhelník otočíme tak, aby přepona byla rovnoběžná s přímkou  $p$ . Dále využijeme posunutí ve směru přímky  $q$  a ve směru přímky  $p$ , aby přepona ležela na přímce  $p$  a vrchol pravého úhlu na přímce  $q$ . Pak sestrojíme příslušný počet kolmých úseků podle zadání.

Z úlohy 1 plyne, že jednotlivé úseky tvoří členy nekonečné geometrické posloupnosti s prvním členem 6 a kvocientem  $a$ , kde  $a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . Protože je splněna podmínka konvergence příslušné

nekonečné geometrické řady ( $a < 1$ ), je hledaná délka lomené čáry  $s = \frac{6}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18(\text{cm})$ .