evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# PROČ NE?

**Popis aktivity**

Odvození vzorců z planimetrie pomocí integrálního počtu

**Předpokládané znalosti**

Obsah trojúhelníka a čtyřúhelníka, lineární funkce, směrnice přímky, určitý integrál

**Zadání**

Můžeme pomocí integrálního počtu vypočítat obsah čtverce, obdélníka a trojúhelníka? Proč ne? Odvodíme známé vzorce.

Pomocí integrálního počtu odvoďte vzorec pro obsah

a) čtverce o straně $a$

b) obdélníka se stranami $a,b$

c) pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami $a,b$

d) rovnoramenného trojúhelníka se základnou $z$ a příslušnou výškou $v$

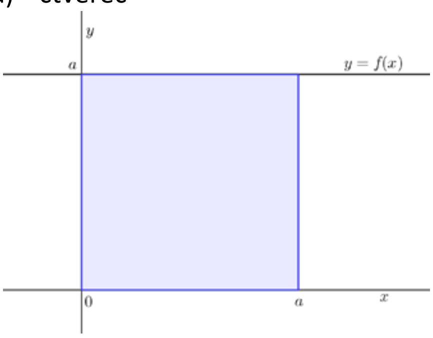
e) rovnostranného trojúhelníka o straně $a$

f) obecného trojúhelníka se stranou $a$ a příslušnou výškou $v_a$

**Možný postup řešení, metodické poznámky**

Ve všech případech obrazec, jehož obsah máme vypočítat, umístíme vhodně v soustavě souřadnic $Oxy$ a využijeme toho, že pro obsah obrazce $S(a,b,f)$, který je omezen přímkami $x=a, x=b,$ osou $x$ a grafem funkce $f$ platí : $S=\int_a^b f(x)dx$, kde $y=f(x)$ je funkce spojitá a nezáporná v $\langle a;b\rangle$.

a) čtverec

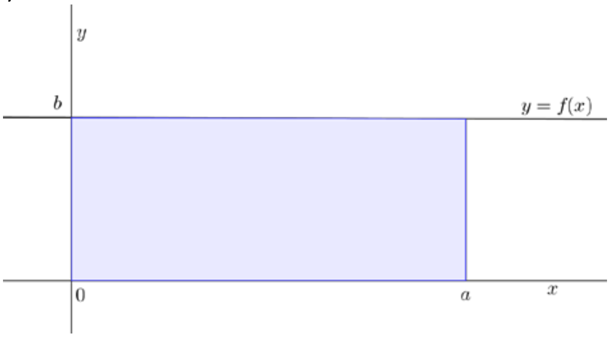



Konstantní funkce $f: y=a$, jejímž grafem je přímka rovnoběžná s osou $x$, která omezuje čtverec v $\langle 0;a\rangle$, splňuje požadované vlastnosti, tedy platí:

$S=\int_0^a a dx = a\int_0^a dx = a[x]_0^a = a\cdot a = a^2$, což je známý vzorec pro obsah čtverce o straně délky $a$.

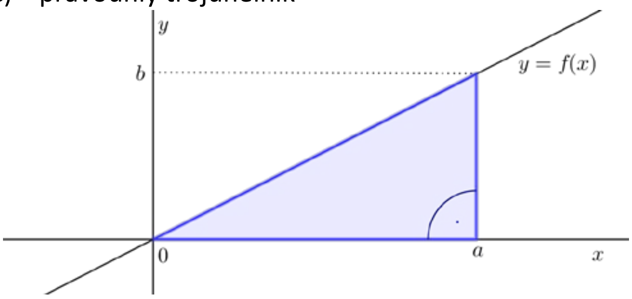
*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*

b) obdélník




Také v tomto případě konstantní funkce $f: y = b$ splňuje podmínky v $\langle 0; a\rangle$, tedy platí $S = \int_0^a b dx = b\int_0^a dx = b\left[x\right]_0^a = ba = ab$. Opět dostáváme známý vzorec pro obsah obdélníka se stranami délek $a$ a $b$.

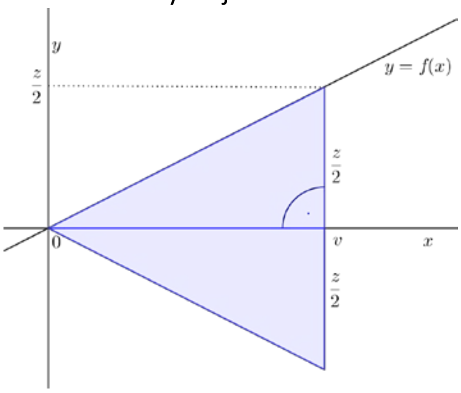
c) pravoúhlý trojúhelník




V tomto případě pravoúhlý trojúhelník omezuje přímka, která je grafem lineární funkce. Protože přímka prochází počátkem soustavy souřadnic, jedná se o funkci $f: y = kx$ (přímá úměrnost). Směrnici $k$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka pomocí funkce tangens, tedy $k = \frac{b}{a}$. Dosazením do výše uvedeného vztahu pro obsah obrazce dostáváme $S = \int_0^a \frac{b}{a} x dx =$ $= \frac{b}{a}\int_0^a x dx = \frac{b}{a}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{ba}{2} = \frac{ab}{2}$, což je vzorec pro obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami $a$ a $b$.

*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*

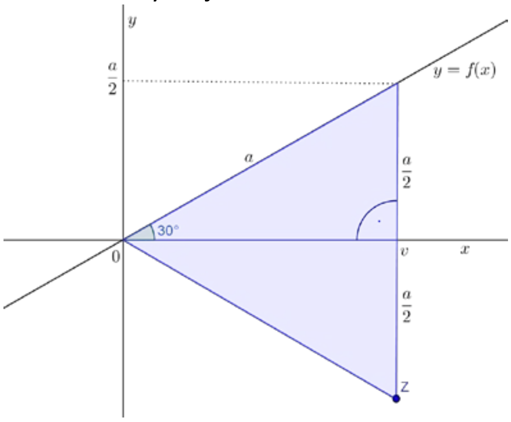
d) rovnoramenný trojúhelník




Můžeme využít předchozího případu a toho, že rovnoramenný trojúhelník je osově souměrný podle výšky na základnu. Jeho obsah je proto dvojnásobkem obsahu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami $v$ a $\frac{z}{2}$.

Tedy $S = 2\cdot\int_0^v \frac{\frac{z}{2}}{v} x\,dx = 2\cdot\frac{z}{2v}\int_0^v x\,dx = \frac{z}{v}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v = \frac{z}{v}\cdot\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{zv}{2}$.

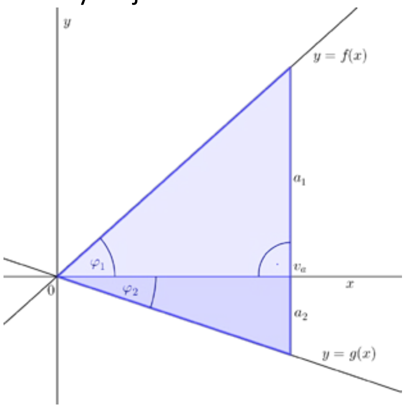
e) rovnostranný trojúhelník




Výšku $v$ rovnostranného trojúhelníka o straně délky $a$ vypočteme pomocí Pythagorovy věty, $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Směrnice $k$ je rovna $tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a opět využijeme osové souměrnosti.

Pak $S = 2\cdot\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{3}x\,dx = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} x\,dx = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{3\cdot a^2}{4}}{2} = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$.

f) obecný trojúhelník




Strana $a$ obecného trojúhelníka je rozdělena výškou $v_a$ na dva úseky $a_1, a_2$ tedy $a = a_1 + a_2$. Funkce $f$ splňuje podmínky úlohy, přičemž $k = tg\varphi_1 = \frac{a_1}{v_a}$ a užitím předcházejících úvah můžeme spočítat obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami $a_1$ a $v_a$ (trojúhelník nad osou $x$). Funkce g podmínky nesplňuje (není nezáporná), jestliže však zobrazíme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $a_2$ a $v_a$ (trojúhelník pod osou $x$) v osové souměrnosti s osou $x$, pak funkce $-g$ podmínky splňuje, $k = tg\varphi_2 = \frac{a_2}{v_a}$ a musí tedy platit: $S = \int_0^{v_a} \frac{a_1}{v_a} x dx + \int_0^{v_a} \frac{a_2}{v_a} x dx = \left( \frac{a_1}{v_a} + \frac{a_2}{v_a} \right) \cdot \int_0^{v_a} x dx = \frac{a_1 + a_2}{v_a} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{v_a} = \frac{a}{v_a} \cdot \frac{{v_a}^2}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2}$,
dostáváme tedy opět známý vzorec pro obsah obecného trojúhelníka.

**Doplňkové aktivity**

Stejným způsobem mohou žáci sami odvodit známé vzorce pro obsah pravoúhlého, rovnoramenného a obecného lichoběžníka se základnami $a, c$ a výškou $v$.

| | |
|---|---|
| **Obrazový materiál** | Dílo autora |