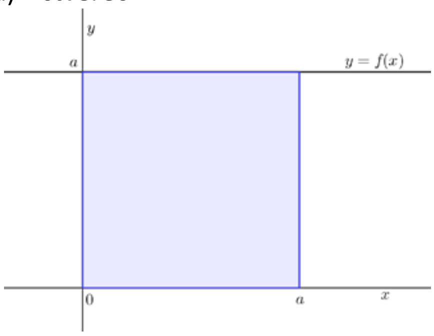
PROČ NE? - ŘEŠENÍ

Ve všech případech obrazec, jehož obsah máme vypočítat, umístíme vhodně v soustavě souřadnic Oxy a využijeme toho, že pro obsah obrazce $S(a,b,f)$, který je omezen přímkami $x=a, x=b,$ osou x a grafem funkce f platí : $S=\int_a^b f(x)dx$, kde $y=f(x)$ je funkce spojitá a nezáporná v $\langle a;b\rangle$.

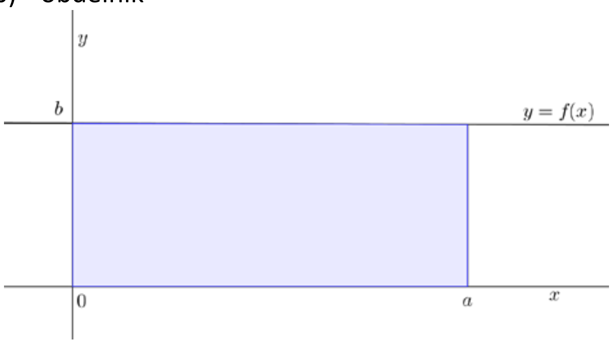
a) čtverec



Konstantní funkce $f: y=a$, jejímž grafem je přímka rovnoběžná s osou x, která omezuje čtverec v $\langle 0;a\rangle$, splňuje požadované vlastnosti, tedy platí:

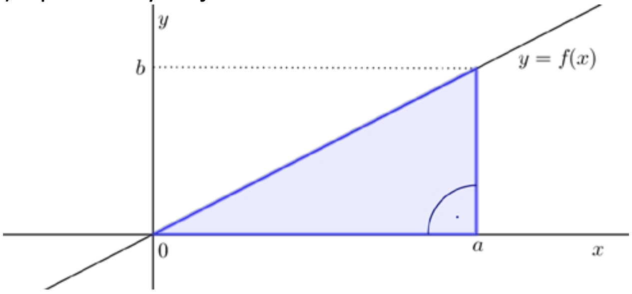
$S=\int_0^a adx=a\int_0^a dx=a[x]_0^a=a\cdot a=a^2$, což je známý vzorec pro obsah čtverce o straně délky a.

b) obdélník



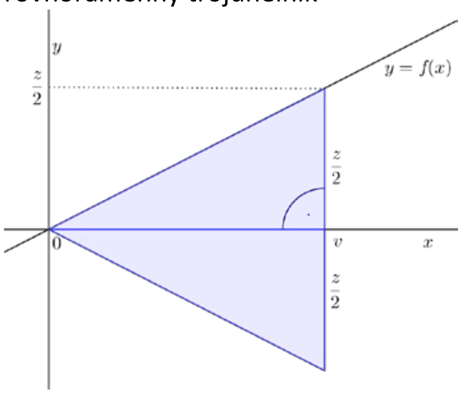
Také v tomto případě konstantní funkce $f: y=b$ splňuje podmínky v $\langle 0;a\rangle$, tedy platí $S=\int_0^a bdx=b\int_0^a dx=b[x]_0^a=ba=ab$. Opět dostáváme známý vzorec pro obsah obdélníka se stranami délek a a b.

c) pravoúhlý trojúhelník



V tomto případě pravoúhlý trojúhelník omezuje přímka, která je grafem lineární funkce. Protože přímka prochází počátkem soustavy souřadnic, jedná se o funkci $f: y = kx$ (přímá úměrnost). Směrnici k určíme z pravoúhlého trojúhelníka pomocí funkce tangens, tedy $k = \frac{b}{a}$. Dosazením do výše uvedeného vztahu pro obsah obrazce dostáváme $S = \int_0^a \frac{b}{a} x dx =$ $= \frac{b}{a} \int_0^a x dx = \frac{b}{a} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{2} \right) = \frac{ba}{2} = \frac{ab}{2}$, což je vzorec pro obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a a b.

d) rovnoramenný trojúhelník

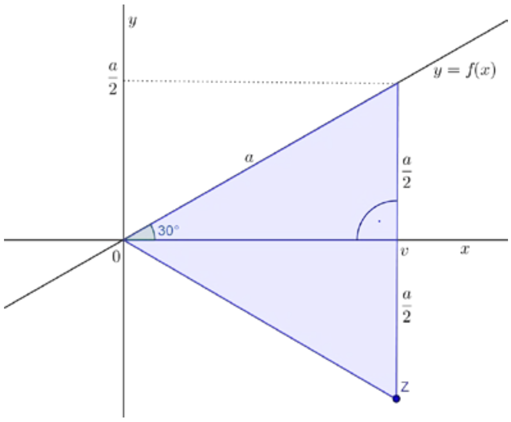


Můžeme využít předchozího případu a toho, že rovnoramenný trojúhelník je osově souměrný podle výšky na základnu. Jeho obsah je proto dvojnásobkem obsahu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami v a $\frac{z}{2}$.

Tedy $S = 2 \cdot \int_0^v \frac{\frac{z}{2}}{v} x dx = 2 \cdot \frac{z}{2v} \int_0^v x dx = \frac{z}{v} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v = \frac{z}{v} \cdot \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{zv}{2}$.

e) rovnostranný trojúhelník

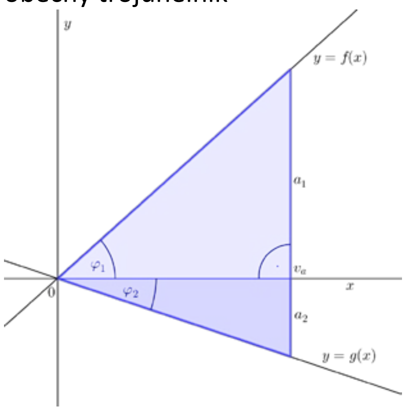
Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



Výšku v rovnostranného trojúhelníka o straně délky a vypočteme pomocí Pythagorovy věty, $v=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Směrnice k je rovna $tg30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ a opět využijeme osové souměrnosti.

Pak $S=2\cdot\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{3}}{3}xdx=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}xdx=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{3\cdot a^2}{4}}{2}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$.

f) obecný trojúhelník



Strana a obecného trojúhelníka je rozdělena výškou v_a na dva úseky a_1, a_2 tedy $a=a_1+a_2$. Funkce f splňuje podmínky úlohy, přičemž $k=tg\varphi_1=\frac{a_1}{v_a}$ a užitím předcházejících úvah můžeme spočítat obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a_1 a v_a (trojúhelník nad osou x). Funkce g podmínky nesplňuje (není nezáporná), jestliže však zobrazíme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a_2 a v_a (trojúhelník pod osou x) v osové souměrnosti s osou x, pak funkce $-g$ podmínky splňuje, $k=tg\varphi_2=\frac{a_2}{v_a}$ a musí tedy platit: $S=\int_0^{v_a}\frac{a_1}{v_a}xdx+\int_0^{v_a}\frac{a_2}{v_a}xdx=\left(\frac{a_1}{v_a}+\frac{a_2}{v_a}\right)\cdot\int_0^{v_a}xdx=\frac{a_1+a_2}{v_a}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{v_a}=\frac{a}{v_a}\cdot\frac{{v_a}^2}{2}=\frac{a\cdot v_a}{2}$, dostáváme tedy opět známý vzorec pro obsah obecného trojúhelníka.