INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SPIRÁLA

Popis aktivity

Výpočet délek stran trojúhelníku užitím podobnosti trojúhelníků, případně Eukleidových vět, důkaz existence geometrické posloupnosti.

Předpokládané znalosti

Podobnost trojúhelníků, Eukleidova věta o výšce, geometrický průměr, geometrická posloupnost

Potřebné pomůcky

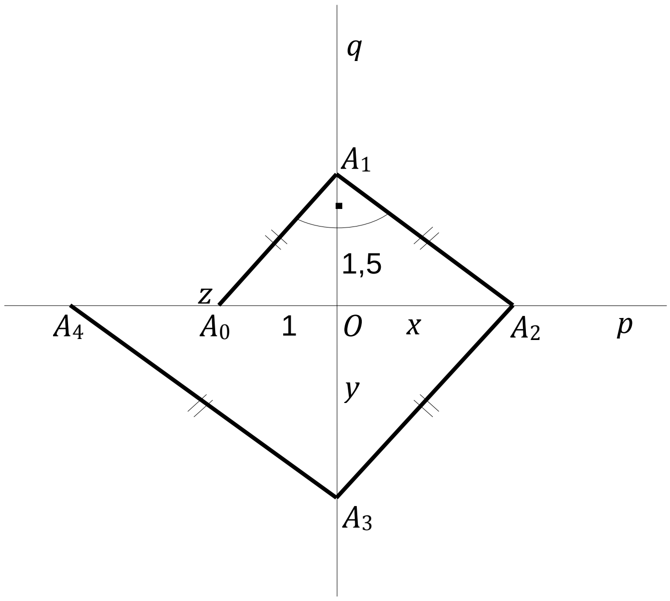
MFF tabulky nejsou nezbytné, ke konstrukčním úlohám je možné využít Cabri geometrii nebo GeoGebru.

Zadání

Úloha 1

Kolmice *p, q* se protínají v bodě *O*. Na přímce *p* leží bod A_0 ve vzdálenosti 1 cm od bodu *O*, bod A_1 přímky *q* je od bodu *O* ve vzdálenosti 1,5 cm.

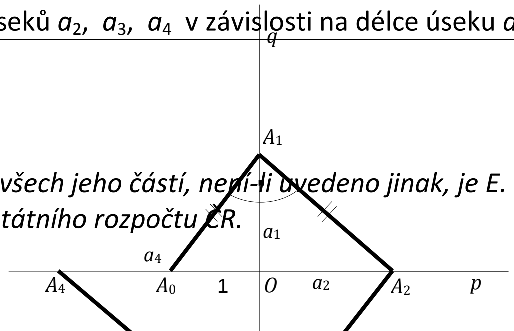
1. Na přímkách *p, q* sestrojte další body A_2–A_4, které tvoří vrcholy pravoúhlé lomené čáry (viz náčrtek).
2. Změřte délky úseků *x, y, z.*
3. Vypočtěte délky úseků *x, y, z.*
4. Dokažte, že délka úseku *y* je geometrickým průměrem délek úseků *x* a *z.*



Úloha 2

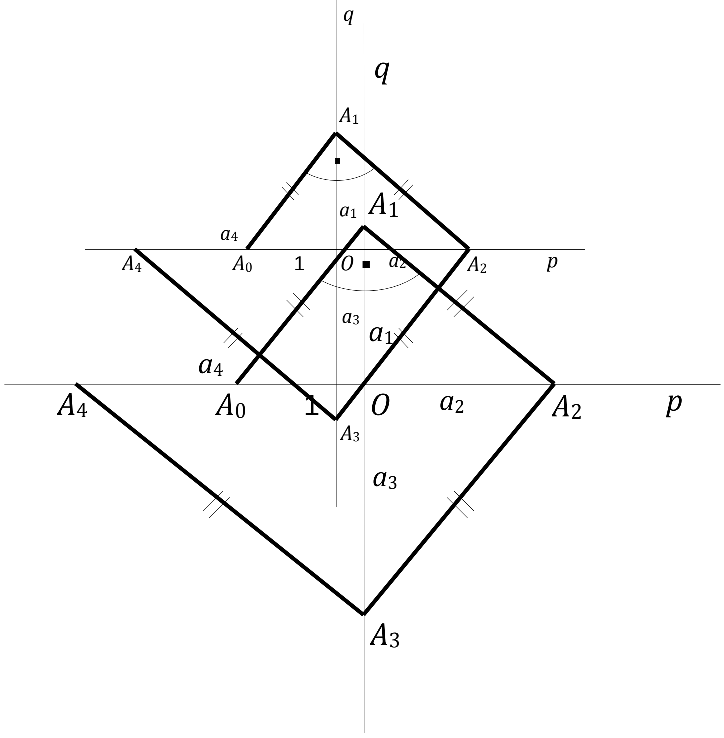
Kolmice *p, q* se protínají v bodě *O*. Na přímkách *p, q* leží body $A_0 – A_4$ ve vzdálenostech 1, a_1, a_2, a_3, a_4 od bodu *O*.

1. Vypočtěte délky úseků a_2, a_3, a_4 v závislosti na délce úseku a_1.



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

2. Charakterizujte posloupnost 1, a_1, a_2, a_3, a_4 .



Možný postup řešení, metodické poznámky

Úloha 1

1. Konstrukce pomocí pravítka a kružítka vyžaduje pouze přesné sestrojení kolmic. Lze však také pracovat v Cabri geometrii nebo v GeoGebře.
2. Po změření $x \doteq 2{,}2$ cm; $y \doteq 3{,}4$ cm; $z \doteq 5$ cm
3. ΔA_0A_1O je podobný ΔA_1A_2O $\Rightarrow \dfrac{1,5}{1} = \dfrac{x}{1,5} \Rightarrow x = 1,5^2$,

   ΔA_1A_2O je podobný ΔA_2A_3O $\Rightarrow \dfrac{x}{1,5} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{1,5} = \dfrac{1,5^4}{1,5} = 1,5^3$,

   ΔA_2A_3O je podobný ΔA_3A_4O $\Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{z}{y} \Rightarrow z = \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{1,5^6}{1,5^2} = 1,5^4$
4. Geometrický průměr veličin a_1, a_2 je definován jako $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$. V našem případě $\sqrt{x \cdot z} = \sqrt{1,5^2 \cdot 1,5^4} = \sqrt{1,5^6} = 1,5^3 = y$, což jsme měli dokázat.

Úloha 2

1. Je možné počítat jako v úloze 1 užitím podobnosti ΔA_0A_1O, ΔA_1A_2O, ΔA_2A_3O a ΔA_3A_4O. Pak

$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = {a_1}^2$

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = \frac{{a_2}^2}{a_1} = \frac{{a_1}^4}{a_1} = {a_1}^3$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = \frac{{a_3}^2}{a_2} = \frac{{a_1}^6}{{a_1}^2} = {a_1}^4.$

Můžeme však využít Eukleidovy věty o výšce v pravoúhlých trojúhelnících $A_0A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$.
Pak z $\Delta A_0A_1A_2$ plyne $1 \cdot a_2 = {a_1}^2 \Rightarrow a_2 = {a_1}^2$,
resp. v $\Delta A_1A_2A_3$ je $a_1 \cdot a_3 = {a_2}^2$, tedy $a_3 = \frac{{a_2}^2}{a_1} = \frac{{a_1}^4}{a_1} = {a_1}^3$
a obdobně z $\Delta A_2A_3A_4$ dostaneme $a_4 = {a_1}^4$.

2. Konečná pětičlenná posloupnost $1, a_1, {a_1}^2, {a_1}^3, {a_1}^4$ je geometrická posloupnost s prvním členem 1 a kvocientem a_1.

Doplňkové aktivity	
Je možné zadat žákům za úkol vyjádřit např. délku příslušné lomené čáry.	
Obrazový materiál	Dílo autora