

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STŘEDNÍ PŘÍČKA

Popis aktivity

Řešení planimetrické úlohy metodou analytické geometrie.

Předpokládané znalosti

Vektor v rovině, souřadnice bodu a vektoru, lineární závislost a nezávislost vektorů, souřadnice středu úsečky, velikost vektoru, obecná rovnice přímky, vzdálenost bodu od přímky, obsah lichoběžníka, obsah trojúhelníka, podobnost trojúhelníků

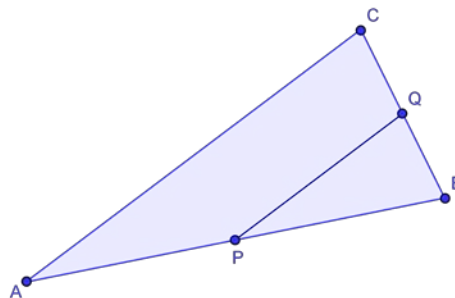
Zadání

Jsou dány body $A[-7; 2]$, $B[3; 0]$, $C[1; 4]$.

1. Dokažte, že body A, B, C tvoří trojúhelník.
2. Ověřte obě vlastnosti střední příčky trojúhelníka (tj. že je rovnoběžná s protější stranou a její velikost je rovna polovině velikosti protější strany).
3. Vypočítejte obsah lichoběžníka, jehož jednou základnou je strana trojúhelníka a druhou střední příčka a dokažte, že obsah tohoto lichoběžníku je roven $\frac{3}{4}$ obsahu daného trojúhelníka.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Body A, B, C tvoří trojúhelník, jestliže vektory $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = C - A$ jsou lineárně nezávislé, tj. neexistuje $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ tak, že $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. V našem případě $\vec{u} = (10; 2)$, $\vec{v} = (8; 6)$, takové k neexistuje.
2. Označme střední příčku PQ , kde P je střed strany AB a Q je střed strany BC .



Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickými průměry souřadnic krajních bodů úsečky, tedy $P\left[\frac{-7+3}{2}; \frac{-2+0}{2}\right]$ a $Q\left[\frac{3+1}{2}; \frac{0+4}{2}\right]$. Po úpravě $P = [-2; -1]$ a $Q = [2; 2]$.

Směrový vektor střední příčky $Q - P = (4; 3)$. Protože směrový vektor protější strany

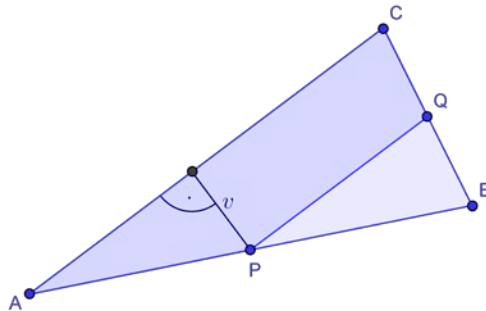
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$C - A = (8; 6) = 2 \cdot (Q - P)$, jsou vektory $C - A$ a $Q - P$ lineárně závislé a tedy střední příčka PQ a strana AC jsou rovnoběžné.

Vypočteme velikosti těchto vektorů, tedy

$|C - A| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, $|Q - P| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = \frac{1}{2}|C - A|$ a tím jsme ověřili i druhou vlastnost střední příčky.

3. S využitím výpočtů z předcházející úlohy vypočteme obsah lichoběžníku $PQCA$ podle vzorce z planimetrie, $S_L = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$. Délky jeho základů, tedy velikosti úseček PQ a CA již známe, zbývá vypočítat výšku v jako vzdálenost např. bodu P od přímky AC .



K tomu potřebujeme obecnou rovnici přímky AC ve tvaru $ax + by + c = 0$, abychom mohli dosadit do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky v rovině.

Protože směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{v} = (8; 6)$ z úlohy 1., je normálový vektor této přímky $\vec{n} = (3; -4) = (a; b)$. Koeficient c určíme z podmínky $A \in AC$ (nebo $C \in AC$). Dostáváme pro bod A : $3 \cdot (-7) - 4 \cdot (-2) + c = 0$, tedy $c = 13$ a rovnice přímky AC má tvar $3x - 4y + 13 = 0$.

$$\text{Výška } v = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) + 13|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{11}{5} \text{ a obsah lichoběžníku } S_L = \frac{(10+5) \cdot \frac{11}{5}}{2} = \frac{33}{2}.$$

Obsah trojúhelníka ABC můžeme počítat obdobně pomocí vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (CZ), ale můžeme využít i vzorce z analytické geometrie pomocí vektorového součinu. Využijeme-li vektorů $\vec{u} = (10; 2)$ a $\vec{v} = (8; 6)$ z úlohy 1., pak $\vec{u} \times \vec{v} = (10; 2; 0) \times (8; 6; 0) = (0; 0; 44)$ a obsah trojúhelníka $S = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} = \frac{44}{2} = 22$. Skutečně platí, že $S_L = \frac{3}{4} \cdot S = \frac{3}{4} \cdot 22 = \frac{33}{2}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Toto tvrzení dokážeme pomocí podobnosti trojúhelníků. $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ s koeficientem podobnosti $k = \frac{1}{2}$ (body P, Q jsou středy stran), proto pro obsahy S, S' těchto podobných trojúhelníků platí $S' = k^2 \cdot S$. V našem případě je obsah trojúhelníka PBQ roven $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníka ABC a zbytek, tedy lichoběžník $PQCA$ musí být roven $\frac{3}{4}$ obsahu trojúhelníka ABC , což jsme měli dokázat.

Doplňkové aktivity

Obsah lichoběžníku můžeme také vypočítat jako rozdíl obsahů trojúhelníků nebo výšku trojúhelníka počítat pomocí koeficientu podobnosti. Vypočítáme-li délku třetí strany trojúhelníka, můžeme využít Heronova vzorce.