INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VLASTNOSTI KOŘENŮ JEDNÉ KVADRATICKÉ ROVNICE

Popis aktivity

Diskuse o počtu kořenů kvadratické rovnice, je-li koeficient kvadratického členu roven absolutnímu členu, vlastnosti kořenů takové kvadratické rovnice

Předpokládané znalosti

Kvadratická rovnice a její řešení, diskriminant kvadratické rovnice, řešení nerovnic

Zadání

Je dána rovnice $ax^2+bx+a=0$, $a\in R-\{0\}$.

1. Určete podmínky pro koeficienty $a,b\in R$ tak, aby daná rovnice
   a) měla právě jeden (dvojnásobný) kořen
   b) měla dva různé kořeny
   c) neměla řešení v R.

Ve všech případech ověřte své závěry pro konkrétní hodnoty a,b.

2. Dokažte, že pro kořeny x_1,x_2 rovnice $ax^2+bx+a=0$, $a\in R-\{0\}$, $D\geq 0$ platí: $x_1\cdot x_2=1$ (kořeny jsou tedy čísla navzájem převrácená). Obecný závěr ověřte na konkrétních rovnicích z úlohy 1.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. a) Jedná se o kvadratickou rovnici. Tato rovnice má právě jeden (dvojnásobný) kořen, jestliže její diskriminant, tedy $D=b^2-4a^2$ bude roven nule.
   $b^2-4a^2=0\Leftrightarrow b^2=4a^2\Leftrightarrow |b|=2\cdot|a|$. Protože $a\neq 0$, je i $b\neq 0$ a dostáváme buď $b=2a$ nebo $b=-2a$. Kvadratická rovnice bude mít tvar $ax^2+2ax+a=0$ nebo $ax^2-2ax+a=0$. Protože však $a\neq 0$, jedná se po úpravě o rovnice $x^2+2x+1=0$ nebo $x^2-2x+1=0$ resp. o rovnice $(x+1)^2=0$ nebo $(x-1)^2=0$. Tyto rovnice mají právě jeden (dvojnásobný) kořen a to $x_1=x_2=-1$ nebo $x_1=x_2=1$.
   b) Kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny, je-li její diskriminant, tedy v našem případě $D=b^2-4a^2$ kladné číslo.
   To nastane v případě, že $b^2-4a^2>0\Leftrightarrow b^2>4a^2\Leftrightarrow |b|>2\cdot|a|$.
   Této podmínce vyhovují např. rovnice $2x^2+5x+2=0$, $-3x^2+7x-3=0$, $x^2-3x+1=0$, $-4x^2-9x-4=0$, jejichž diskriminanty jsou postupně kladná čísla $9,13,5,17$.
   c)Kvadratická rovnice nemá řešení v R pro $D<0$, tedy pro $|b|<2\cdot|a|$.
   Jako příklad můžeme zvolit rovnice $x^2+x+1=0$, $-2x^2+3x-2=0$, $3x^2-5x+3=0$, $-4x^2-3x-4=0$. Diskriminanty těchto rovnic jsou záporná čísla $-3,-7,-11,-55$.
2. Je-li diskriminant kvadratické rovnice $ax^2+bx+a=0$, $a\in R-\{0\}$ číslo nezáporné, tedy pro koeficienty a,b bude platit $|b|\geq 2\cdot|a|$, budou kořeny příslušné rovnice čísla $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2a}$. Jejich součin

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2a} \cdot \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2a} = \dfrac{b^2-\left(b^2-4a^2\right)}{4a^2} = \dfrac{b^2-b^2+4a^2}{4a^2} = 1$, což jsme měli dokázat.

Bude-li diskriminant roven nule, ukázali jsme, že kořeny rovnice jsou buď $x_1 = x_2 = -1$ nebo $x_1 = x_2 = 1$, v obou případech tedy platí $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Např. pro rovnici $2x^2+5x+2=0$ je $D=9$, $x_1 = \dfrac{-5+3}{2\cdot 2} = \dfrac{-1}{2}$, $x_2 = \dfrac{-5-3}{2\cdot 2} = \dfrac{-8}{4} = -2$ a protože se jedná o převrácená čísla, je $x_1 \cdot x_2 = 1$. Stejně lze dokázanou poučku ověřit i pro ostatní zvolené rovnice s kladným diskriminantem.

Doplňkové aktivity

Můžeme úlohu zformulovat i obráceně – co bude platit pro koeficienty kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0, a \in R-\{0\}$ s nezáporným diskriminantem, budou-li její kořeny navzájem převrácená čísla. Užitím Viètových vzorců, které můžeme žákům připomenout, dostaneme výsledek snadno.