HLEDEJ ČTVERCE

Popis aktivity

Výpočet obsahů čtverců jako členů nekonečné geometrické řady a výpočet součtu této řady.

Předpokládané znalosti

Nekonečná geometrická řada a existence jejího součtu.

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulátor, pracovní list pro žáka

Zadání

Mnoho čtverců

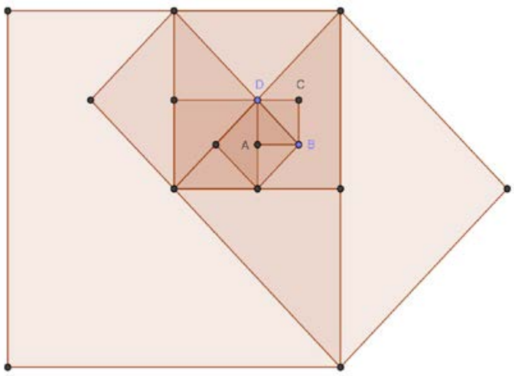
Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany 10. Nad úhlopříčkou BD sestrojte druhý čtverec a jeho úhlopříčka nechť je stranou třetího čtverce.

Takto sestrojujte další čtverce.

Úkoly

1. Vypočtěte délky stran alespoň prvních čtyř takto vzniklých čtverců.
2. Vypočtěte obsahy alespoň prvních čtyř takto vytvořených čtverců.
3. Dokažte, že tyto hodnoty tvoří první členy dvou geometrických posloupností. Určete jejich kvocienty.
4. Pokud existuje součet některé této nekonečné geometrické řady, spočtěte ho.

Možný postup řešení, metodické poznámky



1. Jestliže označíme délku strany čtverce a, potom pro délku úhlopříčku platí: $u = a\sqrt{2}$.
2. Pro první čtverec platí: $a_1 = 10, S_1 = 100$.

   Délka strany druhého čtverce je $a_2 = 10\sqrt{2}$ a jeho obsah $S_2 = 200$.

   Délka strany třetího čtverce je $a_3 = a_2 \cdot \sqrt{2} = 20$ a jeho obsah $S_3 = 400$.

   Délka strany čtvrtého čtverce je $a_4 = a_3 \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2}$ a jeho obsah $S_4 = 800$.

   Délka strany pátého čtverce je $a_5 = a_4 \cdot \sqrt{2} = 40$ a jeho obsah $S_5 = 1600$ atd.

3. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N ; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q$

   Pro posloupnost velikosti stran čtverců platí:

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n\cdot\sqrt{2}}{a_n}=\sqrt{2} \qquad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}\cdot\sqrt{2}}{a_{n+1}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\sqrt{2}$$

Tato posloupnost stran zvětšujících se čtverců je geometrická s kvocientem $q_a=\sqrt{2}$.

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost s kvocientem q, je i posloupnost $\left\{(a_n)^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost s kvocientem q^2.

Proto $a_{n+1}{}^2=(a_n\cdot q)^2=a_n^2\cdot q^2$

Závěr: Posloupnost obsahů těchto čtverců je geometrická s kvocientem $q_S=2$.

4. Protože ani jeden z kvocientů q_1, q_S nesplňuje podmínku pro existenci součtu nekonečné geometrické řady ($|q|\prec 1$), součty neexistují.

Doplňkové aktivity	
Žáci mohou ve skupinách vypočítávat stejnou úlohu s jinou délkou strany prvního čtverce.	
Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	images.google.com, dílo autora