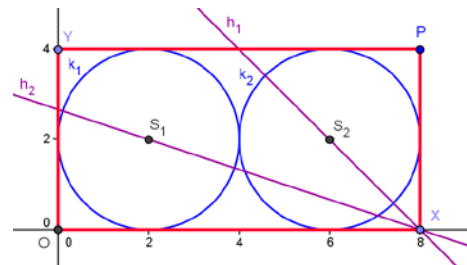


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## JEDEN A DVĚ 3

<b>Popis aktivity</b>
Určení rovnice přímky v rovině, rovnice kružnice a rovnice tečny k dané kružnici.
<b>Předpokládané znalosti</b>
Směrový a normálový vektor, soustava lineární a kvadratické rovnice, charakteristiky kružnice.
<b>Potřebné pomůcky</b>
Tabulky, kalkulačor, pracovní list pro žáka
<b>Zadání</b>
<p>V rovině soustavy souřadnic je dán pouze jeden bod <math>P [8 ; 4]</math>. Narýsujte obdélník <math>OXPY</math>, jehož strany leží na osách soustavy souřadnic, bod <math>P</math> je jeho jedním vrcholem a bod <math>Y</math> leží na ose <math>y</math>.</p> <p>Úkoly:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Vepište tomuto obdélníku dvě stejně velké kružnice maximálního obsahu a napište parametrické, obecné a směrové tvary rovnic přímek, které procházejí středem jedné, resp. druhé kružnice a bodem <math>X</math>.</li> <li>K jedné, resp. druhé vepsané kružnici napište rovnici tečny, která není stranou obdélníka a navíc prochází bodem <math>X</math>.</li> <li>Napište středovou a obecnou rovnici kružnice, která je opsána obdélníku <math>OXPY</math>.</li> </ol>
<b>Možný postup řešení, metodické poznámky</b>
<p>1. Vrcholy obdélníku <math>OXPY</math> mají následující souřadnice:  <math>O [0 ; 0]</math>, <math>X [8 ; 0]</math>, <math>P [8 ; 4]</math>, <math>Y [0 ; 4]</math>.</p> <p>Vepsané kružnice:  <math>S_1 [2 ; 2]</math>, <math>r_1 = 2</math> ; <math>S_2 [6 ; 2]</math>, <math>r_2 = 2</math></p> <p>a) Parametrický tvar: směrový vektor přímky <math>h_1 = \overrightarrow{S_1 X}</math> je <math>(6 ; -2)</math>:</p> $h_1 = \overrightarrow{S_1 X} : \begin{aligned} x &= 2 + 6t \\ y &= 2 - 2t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$ <p>směrový vektor přímky <math>h_2 = \overrightarrow{S_2 X}</math> je <math>(2 ; -2)</math>:</p> $h_2 = \overrightarrow{S_2 X} : \begin{aligned} x &= 6 + 2s \\ y &= 2 - 2s \quad , \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$ <p>b) Obecný tvar: normálový vektor přímky <math>\overrightarrow{S_1 X}</math> je <math>(2 ; 6)</math>: <math>2x + 6y - 16 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0</math></p> <p>normálový vektor přímky <math>\overrightarrow{S_2 X}</math> je <math>(2 ; 2)</math>: <math>2x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0</math></p> <p>c) Směrový tvar: směrnice přímky <math>\overrightarrow{S_1 X}</math> je <math>k = \frac{y_X - y_{S_1}}{x_X - x_{S_1}} = -\frac{1}{3}</math>: <math>y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}</math></p> <p><i>Pozn.:</i> V případě c) lze využít pro výpočet směrnice <math>k</math> složky směrového nebo normálového vektoru</p>



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

této přímky a vztah  $k = \frac{s_2}{s_1} = -\frac{n_1}{n_2}$ , nebo vyjádřit proměnnou  $y$  z obecného tvaru rovnice.

Tedy směrnicový tvar rovnice přímky  $h_2 : y = -x + 4$

2. Existuje jen jedno takové řešení – jedna tečna z bodu  $X$  ke kružnici  $k_1$ :

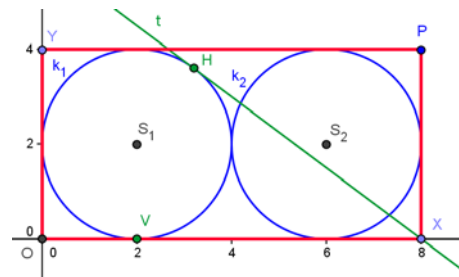
$$k_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x-2) + (y-2)(y-2) = 4.$$

Rovnice poláry  $q$ :

$$\begin{aligned} (x_x - 2)(x - 2) + (y_x - 2)(y - 2) &= 4 \\ (8 - 2)(x - 2) + (0 - 2)(y - 2) &= 4 \\ q : 3x - y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Průsečík kružnice a poláry:

$$k_1 \cap q : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \quad \wedge \quad q : 3x - y - 6 = 0$$



$$q : y = 10 - 3x \Rightarrow x^2 + (10 - 3x)^2 - 4x - 4(10 - 3x) + 4 = 0$$

$$5x^2 - 26x + 32 = 0 \Rightarrow D = 36 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{26 \pm 6}{10}$$

$$k_1 \cap q = \{H\}, H [3; 2; 3; 6]$$

$$k_1 \cap q = \{V\}, V [2; 0] \quad \text{– tento bod není pro úkol 2. podstatný}$$

Parametrický tvar rovnice tečny  $t = \overline{XH}$  :  $t : \begin{aligned} x &= 8 - 4,8w \\ y &= 0 + 3,6w \end{aligned}, w \in R$

Obecný tvar rovnice tečny  $t = \overline{XH}$  :  $t : 3x + 4y - 24 = 0$

Směrnicový tvar rovnice tečny  $t = \overline{XH}$  :  $t : y = -\frac{3}{4}x + 6$

3. Střed kružnice leží v průsečíku úhlopříček daného obdélníka

$OXPY$ , a proto platí  $S [4; 2]$  a dále

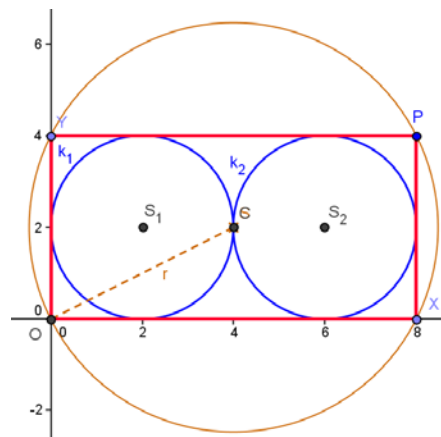
poloměr kružnice je  $r = |OS| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ .

Středová rovnice kružnice:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$$

Obecná rovnice kružnice:

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$$



Doplňkové aktivity

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1. Vypočtete obvod a obsah kružnice opsané obdélníku  $OPXY$ .
2. Napište středový a obecný tvar rovnice kružnice, která prochází body  $PSY$ .

Je vhodné využít obrázku popř. matematického grafického software – Cabri, Geonext, Geogebra.  
Pro výpočty využít program Mathematica, Maxima, Matlab, Maple, Derive aj.

<b>Literatura</b>	Archiv autora
<b>Obrazový materiál</b>	Dílo autora