

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JEDEN A JEDNA 3

Popis aktivity

Určení rovnice přímky v rovině, rovnice elipsy, její tečny a popisných charakteristik elipsy.

Předpokládané znalosti

Směrový a normálový vektor, soustava lineární a kvadratické rovnice, charakteristiky elipsy.

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulačka, pracovní list pro žáka

Zadání

V rovině soustavy souřadnic je dán pouze jeden bod $P [6 ; 4]$.

Narýsujte obdélník $OXPY$, jehož strany leží na osách soustavy souřadnic, bod P je jeho jedním vrcholem a vrchol X leží na ose x .

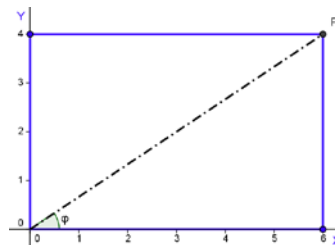
Úkoly

1. Vypočítejte úhel úhlopříčky $|OP|$ obdélníku $OXPY$ a osy x .
2. Napište parametrický, obecný a směrnice tvar rovnice přímky, ve které leží úhlopříčka tohoto obdélníku, která neprochází bodem P .
3. Urči souřadnice průsečíků elipsy vepsané obdélníku $OXPY$ a úhlopříčky, která neprochází bodem P .
4. Napište rovnici tečny elipsy, která je rovnoběžná s úhlopříčkou neprocházející bodem P .

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Výpočet úhlu např. použitím goniometrické funkce:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|PX|}{|OX|} = \frac{4}{6} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 33^\circ 41,5'}}$$



2. a) Parametrický tvar:

směrový vektor přímky \overrightarrow{AB} je $(-6 ; 4)$:

$$\overrightarrow{XY}: x = 6 - 6t$$

$$y = 4t$$

b) Obecný tvar:

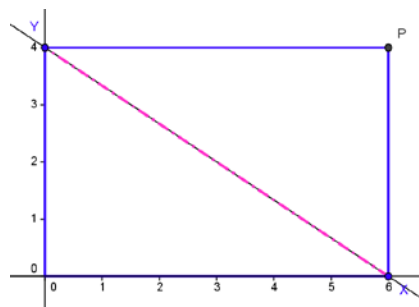
normálový vektor přímky \overrightarrow{XY} je $(4 ; 6)$:

$$4x + 6y + c = 0 \Rightarrow c = -24$$

$$2x + 3y - 12 = 0$$

c) Směrnice tvar:

$$\text{směrnice přímky } \overrightarrow{XY} \text{ je } k = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4$$



3. Řešením jsou dva body.

Směrový vektor úhlopříčky \overrightarrow{XY} je $s_{XY} = (-6 ; 4)$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Parametrický tvar rovnice úhlopříčky $u = |XY|$: $x = 6 - 6t$
 $y = 4t$

Souřadnice středu elipsy a středová rovnice elipsy:

$$S [3; 2]$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

Průsečík elipsy a úhlopříčky: $E \cap u: 4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0 \wedge u: x = 6 - 6t$
 $y = 4t$

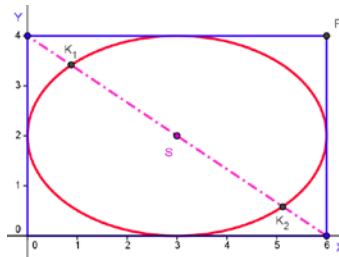
$$4(6-6t)^2 + 9(4t)^2 - 24(6-6t) - 36(4t) + 36 = 0$$

$$8t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

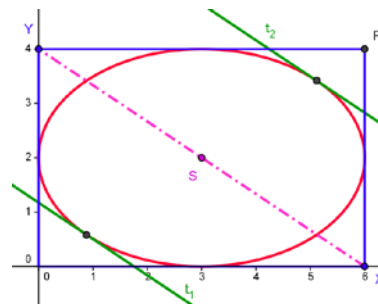
$$E \cap u = \{K_1; K_2\}$$

$$K_1 \left[3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; 2 + \sqrt{2} \right], \quad K_2 \left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}; 2 - \sqrt{2} \right]$$



4. Existují dvě řešení. Obecná rovnice tečny $t: 2x + 3y + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y - \frac{c}{2}$

Průsečík elipsy a tečny:



$E \cap t: 4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0 \wedge t: 2x + 3y + c = 0$

$$4\left(-\frac{3}{2}y - \frac{c}{2}\right)^2 + 9y^2 - 24\left(-\frac{3}{2}y - \frac{c}{2}\right) - 36y + 36 = 0$$

$$18y^2 + 6cy + c^2 + 12c + 36 = 0$$

$$c_{1,2} = -12 \pm 6\sqrt{2}$$

Obecný tvar rovnice tečen:

$$t_1: 2x + 3y - 12 + 6\sqrt{2} = 0$$

$$t_2: 2x + 3y - 12 - 6\sqrt{2} = 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Doplňkové aktivity

1. Napiš parametrické, obecné a směrnicové tvary rovnic přímk, které procházejí bodem P a jedním resp. druhým ohniskem elipsy.
2. Vypočtete souřadnice bodů dotyku tečny rovnoběžné s úhlopříčkou $|XY|$ této elipsy.

Je vhodné využít obrázku popř. matematického grafického software – Cabri, Geonext, Geogebra aj.

Literatura	Archiv autora
-------------------	---------------

Obrazový materiál	Dílo autora
--------------------------	-------------