JEDEN A JEDNA 4

Popis aktivity

Určení rovnice přímky v rovině, rovnice elipsy a jejího průsečíku s přímkou.

Předpokládané znalosti

Charakteristiky elipsy, řešení kvadratické rovnice.

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulátor, pracovní list pro žáka

Zadání

Jeden a jedna 4

V rovině soustavy souřadnic je dán pouze jeden bod $P\left[6\,;4\right]$. Sestrojte obdélník $OXPY$, jehož strany leží na osách soustavy souřadnic, bod P je jeho jedním vrcholem a vrchol X leží na ose x.

Úkoly

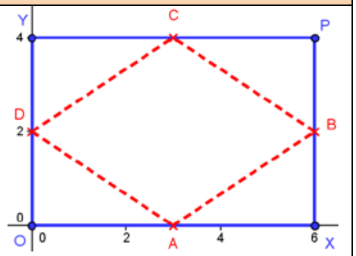
1. Určete obvod čtyřúhelníku, jehož vrcholy leží ve středech stran obdélníku $OXPY$.
2. Napište osovou a obecnou rovnici elipsy $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ s ohnisky v bodech P a Y a s vedlejším vrcholem v průsečíku úhlopříček uvedeného obdélníku $OXPY$.
3. Napište osovou a obecnou rovnici elipsy $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ se středem v bodě P, ohniskem v bodě X a vedlejším vrcholem ve středu strany $|PY|$ uvedeného obdélníku $OXPY$.
4. Napište osovou a obecnou rovnici elipsy $\boldsymbol{\varepsilon_3}$ se středem v bodě O, ohniskem v bodě Y a vedlejším vrcholem ve středu strany $|OX|$ uvedeného obdélníku $OXPY$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Zadaný čtyřúhelník je kosočtverec. Pro délku jeho strany platí:

$$a=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\ j.$$

Obvod tohoto kosočtverce je tedy $o=4\cdot\sqrt{13}\doteq 14{,}42\ j$.



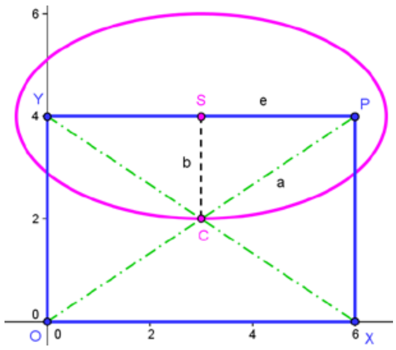
2. Vzdálenost ohnisek elipsy $2e=|YP|=6$. Průsečík úhlopříček obdélníku $OXPY$ (vedlejší vrchol elipsy) má souřadnice $C\left[3\,;2\right]$, proto velikost vedlejší poloosy $b=2$. Velikost hlavní poloosy elipsy $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ je $a=\sqrt{b^2+e^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. Souřadnice středu elipsy $S\left[3\,;4\right]$.

Středový tvar rovnice elipsy $\boldsymbol{\varepsilon_1}$:

$$\frac{(x-3)^2}{13}+\frac{(y-4)^2}{4}=1.$$

Obecný tvar rovnice elipsy $\boldsymbol{\varepsilon_1}$:

$$4x^2+13y^2-24x-104y+192=0.$$



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

3. Střed elipsy $\mathcal{E}_2$ má souřadnice $S \equiv P\,[6\,;4]$, ohnisko $X\,[6\,;0]$, proto velikost excentricity $e = 4$; vedlejší vrchol leží uprostřed strany $|PY|$, tedy $C\,[3\,;4]$ a velikost vedlejší poloosy $b = 3$.

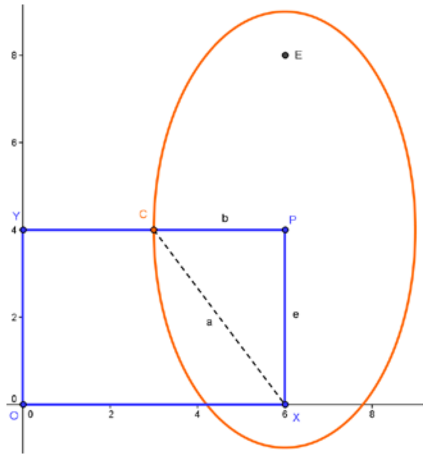
Hlavní poloosa elipsy $\mathcal{E}_2$ je rovnoběžná s osou o_y a její velikost je $a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Středový tvar rovnice elipsy $\mathcal{E}_2$:

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1.$$

Obecný tvar rovnice elipsy $\mathcal{E}_2$:

$$25x^2 + 9y^2 - 300x - 72y + 819 = 0.$$



4. Střed elipsy $\mathcal{E}_3$ má souřadnice $S \equiv O\,[0\,;0]$, ohnisko $Y\,[0\,;4]$, proto velikost excentricity $e = 4$; vedlejší vrchol leží uprostřed strany $|OX|$, tedy $C\,[3\,;0]$ a velikost vedlejší poloosy $b = 3$.

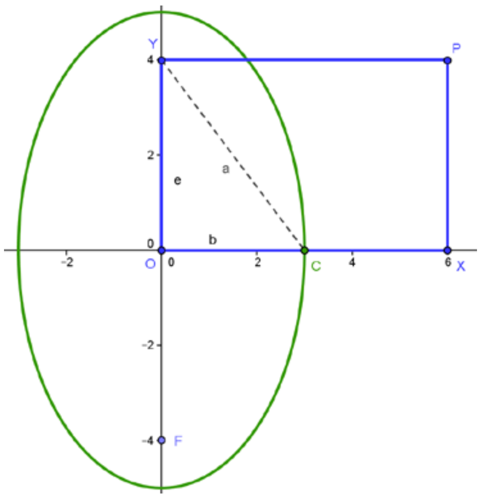
Hlavní poloosa elipsy $\mathcal{E}_3$ je rovnoběžná s osou o_y a její velikost je $a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Středový tvar rovnice elipsy $\mathcal{E}_3$:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Obecný tvar rovnice elipsy $\mathcal{E}_3$:

$$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0.$$



Doplňkové aktivity

1. Vypočtěte souřadnice vrcholů a obou ohnisek uvedených tří elips.
2. Vypočtěte průsečíky každé elipsy se stranami obdélníku $OXPY$.
3. Vypočtěte průsečíky každé elipsy s osami soustavy souřadnic.

Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	Dílo autora